MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

55. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 3. DEZEMBER 1951)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1951

Math.
Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstraße 4.

Geschäftsführender Herausgeber:
H. Wielandt, Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebs-Vertretung des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W.C. 2.

55. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Wielandt, Prof. Dr. H., Tübingen, Math. Institut der Universität: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen 1

Jurkat, Dr. W., Tübingen, Math. Institut der Universität: Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter 8

Wunderlich, Prof. Dr. W., Wien IV, Karlsplatz 13: Zur Statik der Strickleiter 13

Peyerimhoff, Dr. A., Gießen/Lahn, Math. Institut der Universität; Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren 23

Zeller, Dr. K., Tübingen, Math. Institut der Universität: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen 55

Knoche, H.-G., Berlin-Zehlendorf, Pasewaldtstr. 7: Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen 71

Parthasarathy-Rajagopal, Dr. C. T. Rajagopal, Ramanujan Institute of Mathematics, 14 Agaram Road, Tambaram, Madras (India): A Theorem on the Riemann-Liouville Integral 84

Jurkat-Peyerimhoff, Dr. W. Jurkat, Tübingen, Math. Institut der Universität: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen 92

Aumann, Prof. Dr. G., München 2, Elvirastr. 2: Alternativ-Zerlegungen in Booleschen Verbänden 109

Meschkowski, Dr. H., Berlin-Friedenau, Bundes-Allee 83: Beziehungen zwischen den Normalabbildungsfunktionen der Theorie der konformen Abbildung 114

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 1–7 (1951).

Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen.

Von

Helmut Wielandt in Tübingen.

1. Inhaltsübersicht.

Sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ paarweise vertauschbare Untergruppen einer Gruppe (also $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j\mathfrak{G}_i$), so ist das Produkt $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$ bekanntlich ebenfalls eine Gruppe. Mit der Frage, was über die Struktur von $\mathfrak{G}$ ausgesagt werden kann, wenn über die Faktoren $\mathfrak{G}_i$ Näheres bekannt ist, hat sich im Falle *zweier* Faktoren in den letzten zwei Jahrzehnten eine ganze Reihe von Arbeiten beschäftigt[1]). Dagegen ist im Falle $k > 2$ im wesentlichen nur der grundlegende Satz von HALL[2]) bekannt: Ist die Ordnung jedes Faktors $\mathfrak{G}_i$ eine Primzahlpotenz, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. Der Wunsch, die Voraussetzungen dieses Satzes abzuschwächen, hat die vorliegende Arbeit angeregt.

Es genügt sicher nicht, von den $\mathfrak{G}_i$ Auflösbarkeit zu fordern; denn die alternierende Gruppe von fünf Symbolen ist in das Produkt zweier auflösbarer Gruppen der Ordnungen 5 und 12 zerlegbar (die dann von selbst vertauschbar sind) und ist dennoch einfach. Dagegen erscheint es denkbar, daß die folgende Voraussetzung genügt, um die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ zu sichern: Jedes $\mathfrak{G}_i$ ist nilpotent (d. h. direktes Produkt seiner SYLOW-Gruppen). In Richtung auf diese Vermutung wird im folgenden bewiesen: Sie trifft für alle k zu, wenn sie für $k = 2$ richtig ist. Vollständig formuliert lautet unser Hauptergebnis:

Satz 1. *Es seien* $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ *paarweise vertauschbare, nilpotente Gruppen; alle Produkte* $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j$ *von je zweien unter ihnen seien auflösbar. Dann ist auch* $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$ *auflösbar. Bezeichnet ferner* $\mathfrak{P}_i$ *die p-*SYLOW*-Gruppe von* $\mathfrak{G}_i$ *(zu einer von i unabhängigen Primzahl p), so ist das Produkt* $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ *von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig und ist eine p-*SYLOW*-Gruppe von* $\mathfrak{G}$. *Und ist schließlich* $\mathfrak{P}'$ *die entsprechend gebildete* SYLOW*-Gruppe von* $\mathfrak{G}$ *zu einer anderen Primzahl* p', *so sind* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{P}'$ *vertauschbar.*

---

[1]) U. a. I. SCHUR 1933, H. WIELANDT 1935 und 1949, R. KOCHENDÖRFFER 1937, G. ZAPPA 1940/2, G. CASADIO 1941, J. SZÉP 1948—1951, L. RÉDEI 1950, N. ITÔ 1951. Die drei erstgenannten Verfasser benutzen die Sprechweise der Permutationsgruppen und setzen nur die Struktur eines der beiden Faktoren als bekannt voraus.

[2]) P. HALL, A characteristic property of soluble groups. Journal London math. Soc. **12** (1937), 198—200.

Wie der Verfasser einer freundlichen Mitteilung von Herrn Rédei entnimmt, hat Itô in Verschärfung der Ergebnisse von Szép[3]) soeben bewiesen, daß $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ sicher dann auflösbar ist, wenn $\mathfrak{G}_1$ nilpotent und $\mathfrak{G}_2$ abelsch oder eine p-Gruppe ist. Zieht man diesen Satz von Itô[4]) heran, so ergibt Satz 1 die folgende Erweiterung des Satzes von Hall:

Satz 2. *Das Produkt paarweise vertauschbarer Gruppen, von denen eine nilpotent ist und die übrigen abelsch sind, soweit sie nicht Primzahlpotenzordnung haben, ist auflösbar.*

Insbesondere ist also das *Produkt mehrerer paarweise vertauschbarer abelscher Gruppen stets auflösbar.* Am Schluß der Arbeit gehen wir ein wenig auf den Sonderfall ein, daß alle Faktoren $\mathfrak{G}_i$ zyklisch sind; derartige Produkte haben eine sehr spezielle Struktur:

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_i$ zyklisch, $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j\mathfrak{G}_i$ $(i, j = 1, \dots, k)$. *Sind* $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ *die sämtlichen Primteiler der Ordnung von* $\mathfrak{G}$, *und ist* $\mathfrak{P}_\varrho$ *eine zu* p_ϱ *gehörige Sylow-Gruppe von* $\mathfrak{G}$, *so sind* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_{k-1}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{G}$.

2. Sylow-Gruppen des Produkts zweier vertauschbarer Gruppen.

In diesem Abschnitt betrachten wir das Produkt $\mathfrak{G}$ zweier vertauschbarer Gruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ beliebiger Struktur; sie sollen nur endliche Ordnung haben, wie alle Gruppen in dieser Arbeit. Zu den p-Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ rechnen wir als Grenzfall auch die nur aus dem Einheitselement E bestehende Gruppe (wenn die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nicht durch p teilbar ist).

Satz 4. $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$ *seien vertauschbar;* $\mathfrak{P}_1$ *und* $\mathfrak{P}_2$ *seien vertauschbare Sylow-Gruppen von* $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$ *zur selben Primzahl* p. *Dann ist* $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ *eine* p-*Sylow-Gruppe von* $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$, *der Durchschnitt* $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ *ist eine* p-*Sylow-Gruppe von* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{D}$.

Beweis. Für die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gilt bekanntlich, wenn wir allgemein die Anzahl der Elemente einer Menge $\mathfrak{M}$ mit $(\mathfrak{M})$ bezeichnen: $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2) = (\mathfrak{G}_1)(\mathfrak{G}_2)/(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$. Bezeichnen wir die höchste in der Ordnung von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}$ aufgehende Potenz von p mit g_1, g_2, g, d, so folgt $g = g_1 g_2/d$. Andererseits ist

$$(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2) = (\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) = g_1 g_2/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2).$$

---

[3]) J. Szép, On factorisable, not simple groups. Acta Sci. math., Szeged, **13** (1950), 239–241.

[4]) N. Itô. Remarks on factorisable groups. Erscheint demnächst in Acta Sci. math., Szeged. — Den gleichen Satz hatte der Verfasser in der ersten Fassung der vorliegenden Note ohne Kenntnis der Arbeiten von Szép und Itô erhalten. Der Beweis wird hier nicht gebracht, da er sich nicht wesentlich von dem Beweis von Itô unterscheidet.

Zusammen mit den trivialen Beziehungen $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) | d$, $(\mathfrak{P}) | g$ ergibt dies $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) = d$ und $(\mathfrak{P}) = g$. Das sind die beiden Behauptungen von Satz 4.

Es ist bemerkenswert, daß die zweite Voraussetzung von Satz 4 durch passende Wahl der Sylow-Gruppen stets erfüllt werden kann, wenn die erste gilt. Um dies zu zeigen, schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 5. *In* $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ *sei* $\mathfrak{G}_1'$ *konjugiert zu* $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2'$ *konjugiert zu* $\mathfrak{G}_2$. *Dann ist* $\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2' = \mathfrak{G}$, *und es gibt* $G \in \mathfrak{G}$ mit

$$G^{-1} \mathfrak{G}_1 G = \mathfrak{G}_1', \quad G^{-1} \mathfrak{G}_2 G = \mathfrak{G}_2'.$$

Beweis. (a) Zunächst werde $\mathfrak{G}_2' = \mathfrak{G}_2$ vorausgesetzt. Es gibt $H \in \mathfrak{G}$ mit $H^{-1} \mathfrak{G}_1 H = \mathfrak{G}_1'$. Wir zerlegen $H = G_1 G_2$ mit $G_i \in \mathfrak{G}_i$ und setzen $G = G_2$. Dann wird

$$G^{-1} \mathfrak{G}_1 G = G_2^{-1} \mathfrak{G}_1 G_2 = G_2^{-1} G_1^{-1} \mathfrak{G}_1 G_1 G_2 = H^{-1} \mathfrak{G}_1 H = \mathfrak{G}_1'$$
$$G^{-1} \mathfrak{G}_2 G = G_2^{-1} \mathfrak{G}_2 G_2 = \mathfrak{G}_2$$
$$\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2' = G^{-1} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 G = \mathfrak{G}.$$

(b) Im allgemeinen Fall wählen wir gemäß (a) ein $L \in \mathfrak{G}$ mit

$$L^{-1} \mathfrak{G}_1 L = \mathfrak{G}_1', \quad L^{-1} \mathfrak{G}_2 L = \mathfrak{G}_2$$

und haben $\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$. Hieraus folgt, wieder nach (a), die Existenz eines $K \in \mathfrak{G}$ mit $K^{-1} \mathfrak{G}_1' K = \mathfrak{G}_1'$, $K^{-1} \mathfrak{G}_2 K = \mathfrak{G}_2'$. Nun leistet $G = L K$ das Gewünschte.

Satz 6. *Ist* $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$, *so gibt es zu jeder Primzahl* p *eine* Sylow-*Gruppe* $\mathfrak{P}_i$ *von* $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$ *derart, daß* $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ *eine* p-Sylow-*Gruppe von* $\mathfrak{G}$ *ist.*

Beweis. Wir wählen irgendwelche p-Sylow-Gruppen $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \mathfrak{P}^*$ von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$. Dann gibt es nach den Sylowschen Sätzen zwei Elemente $A_i \in \mathfrak{G}$ mit $A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i < \mathfrak{P}^*$ $(i = 1, 2)$. Wir wählen nach Hilfssatz 5 ein $G \in \mathfrak{G}$ mit $G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{G}_i A_i G = \mathfrak{G}_i$ und setzen

$$G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i G = \mathfrak{P}_i, \quad G^{-1} \mathfrak{P}^* G = \mathfrak{P}.$$

Dann gilt

$$\mathfrak{P}_i < G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{G}_i A_i G = \mathfrak{G}_i, \quad (\mathfrak{P}_i) = (\mathfrak{P}_i^*), \quad (\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}^*).$$

Daher sind $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$ p-Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$. Bezeichnen wieder g_1, g_2, g, d die beim Beweis von Satz 4 eingeführten Potenzen von p, so haben wir zur Abschätzung der Elementezahl von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ die Beziehung

$$7. \qquad (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2) = \frac{(\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)}{(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)} \geqq \frac{g_1 g_2}{d} = (\mathfrak{P}).$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{P}_i = G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i G < G^{-1} \mathfrak{P}^* G = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 < \mathfrak{P}.$$

Aus 7. folgt daher $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$, hieraus $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$. Damit ist Satz 6 bewiesen. Besonders einfach ist der Fall, daß sowohl in $\mathfrak{G}_1$ wie in $\mathfrak{G}_2$ nur je eine p-SYLOW-Gruppe vorhanden ist; dann müssen diese beiden miteinander vertauschbar sein. Insbesondere gilt daher:

Satz 8. *Sind $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ vertauschbare nilpotente Gruppen, so sind die beiden SYLOW-Gruppen von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, welche zur selben Primzahl p gehören, vertauschbar, und ihr Produkt ist eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$.*

3. Sylow-Komplemente des Produkts zweier vertauschbarer Gruppen.

Unter einem p-SYLOW-Komplement der Gruppe $\mathfrak{G}$ verstehen wir nach HALL eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die als Ordnung den größten zu p fremden Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$ hat. Die Bedeutung dieses Begriffes beruht darauf, daß $\mathfrak{G}$ genau dann auflösbar ist, wenn $\mathfrak{G}$ zu jeder Primzahl p mindestens ein p-SYLOW-Komplement enthält [2]). — In einem gewissen Ausmaß lassen sich die eben für SYLOW-Gruppen bewiesenen Sätze auf SYLOW-Komplemente übertragen.

Satz 9. *$\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ seien vertauschbar; $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ seien vertauschbare SYLOW-Komplemente zur selben Primzahl p. Dann ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ ein p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$; der Durchschnitt $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ ist ein p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{D}$.*

Der Beweis verläuft wörtlich wie der von Satz 4; nur hat man jetzt unter g_1, g_2, g, d den *größten p-freien Teiler* der Ordnung von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}$ zu verstehen.

Satz 10. *Die Gruppe $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ sei auflösbar. Dann gibt es zu jeder Primzahl p ein SYLOW-Komplement $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$ derart, daß $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ ein p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}$ ist.*

Beweis. $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ sind auflösbar, enthalten also p-SYLOW-Komplemente $\mathfrak{P}^*, \mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*$. Nach HALL [5]) gibt es zwei Elemente $A_i \in \mathfrak{G}$ mit $A_i^{-1}\mathfrak{P}_i^* A_i \leq \mathfrak{P}^*$ $(i = 1, 2)$. Nach derselben Vorschrift wie beim Beweis von Satz 6 wählen wir $G \in \mathfrak{G}$ und definieren wir $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}$. Dann sind diese Gruppen p-SYLOW-Komplemente von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$, und es ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 < \mathfrak{P}$. Da wieder die Abschätzung 7. gilt (mit der beim Beweis von Satz 9 eingeführten Bedeutung von g_1 usw.), folgt $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$ und die Behauptung über $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$. — Wir heben den Sonderfall nilpotenter Faktoren hervor, in welchem es zu jeder Primzahl nur ein SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_i$ gibt:

Satz 11. *Sind $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ vertauschbare nilpotente Gruppen, deren Produkt $\mathfrak{G}$ auflösbar ist, so sind die beiden SYLOW-Komplemente von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, welche zur selben Primzahl p gehören, vertauschbar; ihr Produkt ist ein p-SYLOW-Komplemeut von $\mathfrak{G}$.*

---

[5]) P. HALL, A note on soluble groups. Journal London math. Soc. **3** (1928), 98—105.

4. Beweis von Satz 1.

Es sei $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j \mathfrak{G}_i$ auflösbar, $\mathfrak{G}_i$ nilpotent ($i, j = 1, 2, \dots, k$). Für eine beliebige, fest gewählte Primzahl p bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_i$ die p-SYLOW-Gruppe und mit $\mathfrak{Q}_i$ das p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_i$. Wir gehen schrittweise vor.

(a) Wir zeigen zunächst, daß die Gruppen

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_k = \mathfrak{Q}$$

eine p-SYLOW-Gruppe und ein p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}$ sind, und daß je zwei Faktoren desselben Produkts miteinander vertauschbar sind. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 8 und 11; nach diesen ist auch der erste Teil der Behauptung richtig für $k = 2$. Wir machen einen Induktionsschluß. $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{k-1} = \mathfrak{P}'$ ist eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_{k-1} = \mathfrak{G}'$; $\mathfrak{P}_k$ ist eine p-SYLOW-Gruppe der mit $\mathfrak{G}'$ vertauschbaren Gruppe $\mathfrak{G}_k$ und ist selbst mit $\mathfrak{P}'$ vertauschbar; nach Satz 4 ist $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}' \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$. Der Beweis für die SYLOW-Komplemente verläuft ebenso mit Hilfe von Satz 9.

(b) Aus der hiermit bewiesenen Existenz eines p-SYLOW-Komplements in $\mathfrak{G}$ für jede Primzahl p folgt, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist.

(c) Bilden wir zu den verschiedenen Primteilern $p, p', p'', \dots$ von $(\mathfrak{G})$ nach der unter (a) angegebenen Vorschrift die SYLOW-Komplemente $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \dots$, so sind die aus ihnen zu bildenden Durchschnitte im Sinn von HALL die Glieder eines SYLOW-Systems $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$; sie sind also paarweise vertauschbar[6]). Zu $\mathfrak{S}$ gehört insbesondere der Durchschnitt $\mathfrak{Q}' \cap \mathfrak{Q}'' \cap \dots$. Er ist eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ [6]) und enthält offensichtlich $\mathfrak{P}$, stimmt also mit $\mathfrak{P}$ überein. Daher ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{S}$ enthalten.

(d) Ist $\mathfrak{P}'$ in bezug auf eine andere Primzahl p' ebenso gebildet wie $\mathfrak{P}$ in bezug auf p, so gehört auch $\mathfrak{P}'$ zu $\mathfrak{S}$ und ist daher mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Damit ist der Beweis von Satz 1 beendet. Wir wenden uns nun zum Sonderfall zyklischer Faktoren und setzen zunächst $k = 2$ voraus.

5. Produkte von zwei zyklischen Faktoren.

In diesem Abschnitt bedeuten $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ ständig zwei vertauschbare zyklische Gruppen mit dem Produkt $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 12. *Es sei* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$; $\mathfrak{N}$ *sei ein minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. *Dann ist* $(\mathfrak{N}) = q^\alpha$, q *Primzahl*, $1 \leqq \alpha \leqq 2$. *Im Falle* $\alpha = 2$ *ist* $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_i) = q$ $(i = 1, 2)$.

Beweis. Nach allgemeinen Sätzen über minimale Normalteiler auflösbarer Gruppen ist $(\mathfrak{N}) = q^\alpha$ mit einer Primzahl q. Wir zerlegen alle Elemente $N \in \mathfrak{N}$ in der Form $N = N_1 N_2$ mit $N_i \in \mathfrak{G}_i$. Der Kom-

[6]) P. HALL, On the Sylow systems of a soluble group. Proceed. London math. Soc. **43** (1937), 316—323.

plex $\mathfrak{N}_i$ aller so entstehenden Elemente N_i ist eine Gruppe, denn offenbar ist z. B. $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{G}_2$. Für die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{N}_1$ gilt wegen $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$

$$(\mathfrak{N}_1) = \frac{(\mathfrak{N}_1\mathfrak{G}_2)}{(\mathfrak{G}_2)} = \frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{G}_2)}{(\mathfrak{G}_2)} = \frac{(\mathfrak{N})}{(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_2)}.$$

Daher ist $(\mathfrak{N}_1)$ ein Teiler von $(\mathfrak{N})$ und damit eine Potenz von q. Ebenso ist $\mathfrak{N}_2$ eine q-Untergruppe von $\mathfrak{G}_2$.

Wir bilden das Produkt $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}^*$. Es ist eine Gruppe, denn wir haben $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{N}_1$. $\mathfrak{N}^*$ ist sogar Normalteiler von $\mathfrak{G}$; denn da $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}$ ist, bleibt $\mathfrak{N}^*$ ungeändert bei Ähnlichkeitstransformation mit Elementen aus $\mathfrak{G}_1$, und wegen der Symmetrie der Definition von $\mathfrak{N}^*$ ist $\mathfrak{N}^*$ auch invariant gegenüber $\mathfrak{G}_2$. Wir haben also in $\mathfrak{N}^*$ einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gefunden, welcher den Normalteiler $\mathfrak{N}$ umfaßt und eine Ordnung q^β besitzt.

Aus der allgemeinen Theorie der Gruppen von Primzahlpotenzordnung folgt, daß der Durchschnitt $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{N}$ mit dem Zentrum von $\mathfrak{N}^*$ nicht nur aus E besteht; $\mathfrak{Z}$ ist, wie $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$, Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$, d. h. $\mathfrak{N}$ liegt im Zentrum von $\mathfrak{N}^*$. Insbesondere ist $\mathfrak{N}$ elementweise mit $\mathfrak{N}_1$ vertauschbar. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ elementweise vertauschbar sind, daß also $\mathfrak{N}^*$ das *direkte* Produkt von $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ ist ($\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sind nach Voraussetzung fremd zueinander).

Da $\mathfrak{N}$ als minimaler Normalteiler nur Elemente N der Ordnungen q und 1 enthält, haben auch die Komponenten N_1 und N_2 in der direkten Produktzerlegung $N = N_1N_2$ nur die Ordnungen q oder 1. Andererseits ist $\mathfrak{N}_i$ zyklisch. Daher ist $(\mathfrak{N}_i) \leqq q$. Hieraus folgt $(\mathfrak{N}) \leqq (\mathfrak{N}^*) = (\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2) \leqq q^2$. Der Fall $(\mathfrak{N}) = q^2$ kann nur eintreten, wenn $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$ ist; dann ist $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_i) = (\mathfrak{N}_i) = q$.

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 12 folgt durch einen leichten Induktionsschluß, daß *in dem Produkt zweier vertauschbarer zyklischer Gruppen die Indizes einer Hauptreihe sämtlich Primzahlen oder Primzahlquadrate* sind. Wichtiger ist eine andere Folgerung:

Hilfssatz 13. *Es sei p der größte Primteiler von $(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{P}_i$ die p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$. Dann ist die p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. (a) Wir setzen zunächst voraus, daß $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 \neq E$ ist. Dann enthält dieser Durchschnitt eine im Zentrum von $\mathfrak{G}$ gelegene Untergruppe $\mathfrak{N}$ von Primzahlordnung q. Da wir den zu beweisenden Satz 13 für die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ schon als richtig annehmen können (offenbar ist sie das Produkt der zyklischen Gruppen $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{N}$), ist $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Index in $\mathfrak{G}$ nicht durch p teilbar ist, während der Index von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{H}$ eine Potenz von p ist.

Ist $q = p$, so ist $\mathfrak{H}$ eine p-Gruppe, also mit der Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ dientisch; dann ist $\mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, wie behauptet.

Ist $q \neq p$, so ist $\mathfrak{P}$ eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{H}$, und da $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{P}$ elementweise vertauschbar ist, ist $\mathfrak{P}$ Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Hiernach ist $\mathfrak{P}$ die einzige p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{H}$ und daher gleichzeitig mit $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

(b) Sei jetzt der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$. Nach Hilfssatz 12 enthält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ einer Ordnung q^α mit $1 \leqq \alpha \leqq 2$, q Primzahl. Mittels einer Induktionsvoraussetzung können wir wieder annehmen, daß das Produkt $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Ist $q = p$, so ist $\mathfrak{H}$ eine p-Gruppe, $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Ist $q \neq p$, $\alpha = 1$, so liegt $\mathfrak{N}$ im Zentrum von $\mathfrak{H}$ (wegen $q < p$), und wie unter (a) ergibt sich, daß $\mathfrak{P}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Ist schließlich $q \neq p$, $\alpha = 2$, so enthält $\mathfrak{N}$ genau $q + 1$ Untergruppen der Ordnung q; diese werden bei Ähnlichkeitstransformationen mit den Elementen $P \in \mathfrak{P}$ nur untereinander permutiert. Ist aber speziell $P \in \mathfrak{P}_1$, so bleibt die nach Hilfssatz 12 in $\mathfrak{N}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_1$ der Ordnung q fest, also werden die übrigen q Gruppen nur untereinander permutiert; da $q < p$ ist, bleiben sie einzeln fest, und zwar zunächst als Ganze, dann aber sogar elementweise. Demnach ist $\mathfrak{N}$ elementweise mit $\mathfrak{P}_1$ vertauschbar; dasselbe gilt für $\mathfrak{P}_2$, also liegt $\mathfrak{N}$ im Zentrum von $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{H}$, und $\mathfrak{P}$ erweist sich wie früher als Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

6. Produkte von mehreren zyklischen Gruppen.

Wir bereiten den Beweis des in der Einleitung formulierten Satzes 3 vor.

Hilfssatz 14. *Es sei* $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_i$ *zyklisch*, $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j\mathfrak{G}_i$; p *sei der größte Primteiler von* $(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{P}_i$ *die* p-SYLOW-*Gruppe von* $\mathfrak{G}_i$. *Dann ist* $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ *die einzige* p-SYLOW-*Gruppe von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Daß $\mathfrak{P}$ eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ ist, ist uns schon aus Satz 1 bekannt. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Für $i \neq j$ ist $\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j$ stets ein Normalteiler von $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j$ (das ist trivial, wenn p in der Ordnung von $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j$ nicht aufgeht, und gilt im andern Fall nach Hilfssatz 13). Da wir $\mathfrak{P}$ wegen $\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j\mathfrak{P}_i$ auch in der Form

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_k$$

schreiben können, ist $\mathfrak{P}$ invariant gegenüber $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, daher auch gegenüber $\mathfrak{G}$.

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 14 folgt die Behauptung von Satz 3 unmittelbar durch einen Induktionsschluß, da mit $\mathfrak{G}$ auch jede Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ das Produkt paarweise vertauschbarer zyklischer Gruppen ist.

(Eingegangen am 10. Juni 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 8—12 (1951).

Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter.

Von

W. Jurkat in Tübingen.

Herr M. Riesz hat zur Summierung einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ zwei Verfahren

$$\frac{1}{\omega^\varkappa} \sum_{\nu<\omega} (\omega-\nu)^\varkappa a_\nu \quad \text{und} \quad \frac{1}{n^\varkappa} \sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu)^\varkappa a_\nu$$

eingeführt[1]), die sich dadurch unterscheiden, daß bei dem ersten der Parameter ω stetig gegen ∞ laufen soll, während bei dem zweiten statt ω nur die ganzen Zahlen n benutzt werden. Er zeigte zunächst[2]), daß für alle $\varkappa > 0$ das „stetige" Verfahren mit dem $C_\varkappa$-Verfahren äquivalent ist, und später[3]), daß für $0 < \varkappa < 1$ dasselbe auch für das „unstetige" Verfahren gilt. Damit erhielt er zugleich die Äquivalenz der stetigen und unstetigen Mittel für $0 < \varkappa < 1$[4]).

Wir geben in der vorliegenden Arbeit einen direkten und einfachen Beweis dieser Äquivalenz, und zwar nicht nur für die beiden speziellen oben angeführten Mittelbildungen, sondern gleich für die allgemeinen Rieszschen Mittel. Das Haupthilfsmittel dabei ist eine Erweiterung des bekannten Rieszschen Mittelwertsatzes[5]), die für die unstetigen Mittel die gleichen Dienste leistet wie jener für die stetigen. Auf weitere Anwendungen dieses Mittelwertsatzes werde ich zusammen mit Herrn A. Peyerimhoff später zurückkommen[6]).

1. Eine Ergänzung zum Rieszschen Mittelwertsatz.

1.1. Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (bzw. Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$) heißt summierbar (bzw. limitierbar) zum Wert s durch das Verfahren der Rieszschen Mittel $R^\varkappa(\lambda)$, wenn

$$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} = \frac{1}{\omega^\varkappa} \sum_{\lambda_\nu<\omega} (\omega-\lambda_\nu)^\varkappa a_\nu \to s \qquad (\omega \to \infty) \tag{1}$$

---

[1]) Riesz [8], [9].

[2]) Riesz [10].

[3]) Riesz [12].

[4]) Die Äquivalenz der stetigen und unstetigen Mittel wurde auch für negative Ordnungen $\varkappa$ untersucht: Agnew [1], Forsythe [4].

[5]) Riesz [10], [11], Verblunsky [13], für Anwendungen siehe Hardy-Riesz [6], S. 28 ff.

[6]) Jurkat-Peyerimhoff [7].

gilt; dabei soll $\varkappa \geqq 0$ und λ_n eine monoton gegen ∞ wachsende Zahlenfolge sein:

$$\Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \quad 0 \leqq \lambda_n \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

Wir schreiben $A(\tau) = A^0(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} a_\nu$ und haben dann

$$A^\varkappa(\omega) = \varkappa \int_0^\omega (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau \qquad (\varkappa > 0).$$

Für $0 < \varkappa \leqq 1$ gilt der Rieszsche Mittelwertsatz

$$\left|\varkappa \int_0^\xi (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau\right| \leqq |A^\varkappa(\xi')| \quad (0 \leqq \xi' \leqq \xi \leqq \omega). \tag{3}$$

Seine Gültigkeit hängt nicht von der speziellen Bauart der Funktion $A(\tau)$ ab, so daß allgemeiner[7])

$$\frac{\Gamma(\varkappa + \mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1)\,\Gamma(\varkappa)} \left| \int_0^\xi (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A^\mu(\tau)\, d\tau \right| \leqq |A^{\varkappa+\mu}(\xi')| \tag{4}$$

ist. Wenn in (3) $\xi = \lambda_n$ ist, so läßt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $A(\tau)$ eine spezielle Treppenfunktion ist, mehr aussagen.

Satz 1. *Ist* $\lambda_n \leqq \omega$, $0 < \varkappa \leqq 1$, *so gilt*

$$\left|\varkappa \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau\right| \leqq |A^\varkappa(\lambda_{n'})| \quad \textit{mit} \quad 0 \leqq n' \leqq n. \tag{5}$$

Das Wesentliche ist, daß man für ξ' die besondere Wahl $\xi' = \lambda_{n'}$ treffen kann. Man darf nicht erwarten, daß dies für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen $A(\tau)$ richtig bleibt, wie (4) es vielleicht nahe legen würde. Ein Beispiel wird zeigen, daß schon für lineare Funktionen die Ungleichung (5) falsch wird.

1. 2. Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \varkappa \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau &= \sum_{\nu=1}^{n} \varkappa \int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu} (\omega - \tau)^{\varkappa-1} s_{\nu-1}\, d\tau \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)}\, c(\lambda_n, \nu)\, s_{\nu-1}, \end{aligned}$$

wobei

$$c(\omega, \nu) = \varkappa \int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu} (\omega - \tau)^{\varkappa-1}\, d\tau$$

gesetzt ist. Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist

$$\frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)} = \left(\frac{\omega - \tau_\nu}{\lambda_n - \tau_\nu}\right)^{\varkappa-1} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\nu-1} < \tau_\nu < \lambda_\nu,$$

[7]) Hardy-Riesz [6], S. 29.

und daraus erkennen wir, daß $\frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)}$ mit ν monoton fällt und zwischen 0 und 1 liegt. Durch Anwendung des ABELschen Lemmas finden wir

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)} c(\lambda_n, \nu)\, s_{\nu-1} \right| \leqq \left| \sum_{\nu=1}^{n_1} c(\lambda_n, \nu)\, s_{\nu-1} \right| \quad (0 \leqq n_1 \leqq n)$$

oder anders geschrieben

$$(6) \qquad |\varkappa \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau| \leqq |\varkappa \int_0^{\lambda_{n_1}} (\lambda_n - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau| \quad (0 \leqq n_1 \leqq n).$$

Offenbar können wir mit der rechten Seite von (6) ebenso verfahren wie vorher mit der linken und diesen Prozeß iterieren:

$$|\varkappa \int_0^{\lambda_{n_i}} (\lambda_{n_{i-1}} - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau| \leqq |\varkappa \int_0^{\lambda_{n_{i+1}}} (\lambda_{n_i} - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau|$$

$$(n \geqq n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots \geqq 0).$$

Infolge der Ungleichungen für die n_i muß für mindestens ein i die Gleichheit $n_i = n_{i+1}$ bestehen und für diesen gemeinsamen Wert $n' = n_i$ gilt die behauptete Abschätzung

$$|\varkappa \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau| \leqq |\varkappa \int_0^{\lambda_{n'}} (\lambda_{n'} - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau| = |A^{\varkappa}(\lambda_{n'})|.$$

Der hier gegebene Beweis von Satz 1 ist seiner Methodik nach verwandt mit einem Beweis von BOSANQUET für ein Analogon zum RIESZschen Mittelwertsatz beim $C_\varkappa$-Verfahren[8]). Auch der Mittelwertsatz (3) läßt sich mit dieser Methode beweisen.

1. 3. Bemerkungen zu Satz 1. Für $\varkappa > 1$ wird die Ungleichung (5) falsch, wie das Beispiel $A(\tau) \equiv 1$ lehrt. Für $\varkappa \leqq 0$ kann die rechte Seite von (5) den Wert ∞ haben. Lassen wir dies zu, so bleibt (5) trivialerweise richtig. Weiter sehen wir, daß (5) für $\varkappa = 1$ richtig ist, unabhängig von der speziellen Gestalt von $A(\tau)$. Doch für $0 < \varkappa < 1$ wird die Sachlage anders. *Es gibt dann eine lineare Funktion $A(\tau)$, für welche die Ungleichung* (5) *falsch wird:*

Es sei $A(\tau) = 1 - \tau + a$ und $\lambda_n = n$. Wir haben dann

$$m_1(a) = \int_0^1 (1 - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\varkappa + 1} + a \frac{1}{\varkappa}$$

und

$$m_2(a) = \int_0^1 (2 - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\varkappa + 1}(2^{\varkappa+1} - 1) - \frac{1}{\varkappa}(2^{\varkappa} - 1) + a \frac{1}{\varkappa}(2^{\varkappa} - 1).$$

---

[8]) BOSANQUET [3], der erste Beweis bei BOSANQUET [2] verläuft anders.

m_1 und m_2 werden nur dann für den gleichen Wert a gleich Null, wenn

$$\frac{2^\varkappa - 1}{\varkappa + 1} = \frac{1}{\varkappa + 1}(2^{\varkappa+1} - 1) - \frac{1}{\varkappa}(2^\varkappa - 1),$$

d. h. $2^\varkappa = \varkappa + 1$ ist, also nur für $\varkappa = 0$ oder 1. Für $a = -\frac{\varkappa}{\varkappa+1}$ ist daher $m_1 = 0$ und $m_2 \neq 0$, so daß die Ungleichung (5)

$$|m_2| \leqq |m_1| \quad \text{oder} \quad |m_2| \leqq 0$$

in diesem Fall falsch wird.

2. Ein Äquivalenzsatz.

Mit Hilfe von Satz 1 sind wir in der Lage, eine Aussage über das Verhältnis zwischen den stetigen und unstetigen Rieszschen Mitteln zu machen. Man weiß, daß es für $\varkappa > 1$[9]) einen Unterschied macht, ob ω in (1) stetig gegen ∞ strebt oder nur die Werte λ_n durchläuft. Für $0 < \varkappa \leqq 1$ ist das anders.

Satz 2. *Ist* $0 < \varkappa \leqq 1$ *und*

$$0 < \eta(\omega) \nearrow +\infty, \quad \frac{\omega}{\eta(\omega)} \nearrow \qquad (\omega \to \infty)\ ^{10}), \tag{7}$$

so sind die beiden Konvergenzaussagen

$$A^\varkappa(\omega) = o(1)\,\eta^\varkappa(\omega) \tag{8}$$

und

$$A^\varkappa(\lambda_n) = o(1)\,\eta^\varkappa(\lambda_n) \tag{9}$$

äquivalent, insbesondere also auch $(\eta(\omega) = \omega)$

$$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} \to s \quad \text{und} \quad \frac{A^\varkappa(\lambda_n)}{\lambda_n^\varkappa} \to s.$$

Für den Beweis genügt es von (9) auf (8) zu schließen. Wir zeigen zunächst

$$s_n = o(1)\left(\frac{\eta(\lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)^\varkappa. \tag{10}$$

Nach Satz 1 ist

$$|\varkappa \int_0^{\lambda_n} (\lambda_{n+1} - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau| \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \nu \leqq n} |A^\varkappa(\lambda_\nu)| = o(1)\,\eta^\varkappa(\lambda_n)$$

und folglich

$$\varkappa \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} (\lambda_{n+1} - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau = o(1)\,\eta^\varkappa(\lambda_{n+1}) - o(1)\,\eta^\varkappa(\lambda_n),$$

---

[9]) Man kennt Gegenbeispiele für $\lambda_n = n$, $\varkappa = 2$ und 3: Riesz [12], Hardy [5], S. 114.

[10]) Das Zeichen „$\nearrow$“ bedeutet monoton wachsend (im weiteren Sinne).

d. h. aber

$$(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^\varkappa s_n = o(1)\,\eta_i^\varkappa(\lambda_{n+1}). \tag{10}$$

Mit Hilfe von (10) erhalten wir wieder nach Satz 1

$$A^\varkappa(\omega) = \varkappa \int_0^{\lambda_n} (\omega-\tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\,d\tau + \varkappa \int_{\lambda_n}^{\omega} (\omega-\tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\,d\tau$$

$$= o(1)\,\eta^\varkappa(\lambda_n) + \left(\frac{\omega-\lambda_n}{\eta(\omega)}\right)^\varkappa s_n\,\eta^\varkappa(\omega) = o(1)\,\eta^\varkappa(\omega) \qquad (\lambda_n < \omega \leqq \lambda_{n+1}),$$

da $\frac{\omega-\lambda_n}{\eta(\omega)}$ monoton mit ω wächst, also höchstens gleich $\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\eta(\lambda_{n+1})}$ ist.

Bemerkung zu Satz 2. *Man darf in* (8) *und* (9) *die Zeichen* $o(1)$ *durch* $O(1)$ *ersetzen und Satz 2 bleibt richtig.*

Literaturverzeichnis.

Agnew, R. P.

[1] On Riesz and Cesàro methods of summability, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), 532—548.

Bosanquet, L. S.

[2] A mean value theorem, Journ. London Math. Soc., 16 (1941), 146—148.

[3] Note on convergence and summability factors III, Proc. London Math. Soc. (2), 50 (1949), 482—496.

Forsythe, G. E.

[4] Riesz summability methods of order r, for $\Re(r) < 0$, Duke Math. Journ., 8 (1941), 346—349.

Hardy, G. H.

[5] Divergent series, Oxford (1949).

Hardy, G. H. and Riesz, M.

[6] The general theory of Dirichlet's series, Cambridge (1915).

Jurkat, W. und Peyerimhoff, A.

[7] Mittelwertsätze bei Matrix- nnd Integraltransformationen, Math. Z. 55 (1951), 92—108.

Riesz, M.

[8] Sur la sommation des séries de Dirichlet, Comptes rendus, 149 (1909), 18—20.

[9] Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, Comptes rendus, 149 (1909), 909—912.

[10] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptes rendus, 152 (1911), 1651—1654.

[11] Sur un théorème de la moyenne et ses applications, Acta Lit. ac. Sci. Szeged, 1 (1923), 114—126.

[12] Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, Proc. London Math. Soc. (2), 22 (1923), 412—419.

Verblunsky, S.

[13] On the limit of a function at a point, Proc. London Math. Soc. (2), 32 (1931), 163—199.

(Eingegangen am 29. Mai 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 13—22 (1951).

Zur Statik der Strickleiter.

Von

Walter Wunderlich in Wien.

1. Der vorliegende Aufsatz ist als Beitrag zur „Differenzengeometrie" gedacht, die sich bemüht, differentialgeometrische Beziehungen durch elementargeometrische Sachverhalte an geeigneten finiten Modellen zu veranschaulichen und zu begründen. Die Förderung dieser Arbeitsweise ist vor allem einer Reihe von einschlägigen Abhandlungen zu verdanken, die in dieser Zeitschrift erschienen sind[1]).

Im Sinne der genannten Bestrebungen hat der Verfasser unlängst zur Demonstration der *Schraubwendelfläche* ein Vorlesungsmodell nach dem Muster einer *Strickleiter* herstellen lassen, das aus einer Anzahl von gleich langen Holzstäben besteht, deren Enden in gleichen Abständen in zwei Schnüre eingeknüpft sind. Bei richtiger Haltung des Modells stellen sich Gleichgewichtslagen ein, bei welchen die Sprossen eine äquidistante Folge von Erzeugenden einer Wendelfläche bilden. Daneben existieren jedoch noch *unsymmetrische Gleichgewichtsformen*, und diese sollen hier näher untersucht werden. Den Schlüssel hierzu bietet die Feststellung, daß — bei Vernachlässigung des Eigengewichts — in jedem Knotenpunkt die Sprossenachse und die beiden Seilstrecken aus statischen Gründen in einer Ebene liegen müssen. — Auf die nicht uninteressanten Stabilitätsfragen, die bei dieser Gelegenheit auftreten, wird nicht eingegangen. Besonderes Augenmerk wird hingegen den *Grenzformen* zugewendet, die bei infinitesimaler Verdichtung der Sprossenfolge entstehen. — Auf die naheliegende Verallgemeinerung, die die Gleichabständigkeit der Knoten aufgibt, mag hier bloß hingewiesen sein.

2. Zur Untersuchung stehen also zwei gelenkige Streckenzüge $A_1 A_2 \ldots$ und $B_1 B_2 \ldots$ mit konstanter und gleicher Seitenlänge h, deren gleichbezifferte Ecken durch starre Strecken der gemeinsamen Länge $A_i B_i = c$ verbunden sind; wir wollen von „*Holmpolygonen*" und „*Sprossen*" reden.

Jede *Gleichgewichtslage* dieser idealisierten „Strickleiter" ist dadurch gekennzeichnet, daß je drei von einem Knotenpunkt ausgehende Strecken in einer Ebene liegen, denn nur dann können die in dem

[1]) Einige diesbezügliche Hinweise enthält die Arbeit von R. Sauer: *Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen*, Math. Z. 52 (1950), 611—622, die auch gewisse Berührungspunkte mit dem vorliegenden Aufsatz aufweist.

Knoten angreifenden Kräfte (Zugspannungen in den Holmseiten, Stützdruck in der Sprosse) einander aufheben. Diese Bedingung sei in jedem Knoten erfüllt; die ihm solcherart zugeordnete Ebene heiße „*Knotenebene*".

Fassen wir nun ein *Maschenviereck* der Leiter ins Auge: Es handelt sich wegen der paarweise gleichen Gegenseiten um ein *windschiefes Parallelogramm*, oder — nach einem besseren Vorschlag von BENNETT[2]) — ein „*Isogramm*". Ein solches Viereck ist achsensymmetrisch bezüglich des Gemeinlots der beiden Diagonalen. Demnach ist der (vorzeichenbegabte) Winkel zweier benachbarten (orientierten) Knotenebenen stets auch an der Gegenkante zu finden. Dieser „*Schränkwinkel*" sei für die Holmseiten h mit ψ, für die Sprossen c mit $-\gamma$ bezeichnet; unter der „*Schränkung*" einer Seite soll hingegen der Quotient aus dem Sinus des Schränkwinkels und der Seitenlänge verstanden werden. Nach BENNETT gilt dann die leicht zu beweisende Beziehung

$$\frac{\sin\psi}{h} = \frac{\sin\gamma}{c}, \tag{1}$$

welche besagt, daß Nachbarseiten eines Isogramms entgegengesetzt gleiche Schränkungen besitzen[3]).

Da je zwei aufeinanderfolgende Isogramme unserer Leiter eine Seite c samt dem zugehörigen Schränkwinkel $-\gamma$ gemein haben, so stimmen zufolge (1) auch sämtliche Holmschränkwinkel ψ überein. Somit gilt

Satz 1. *Die beiden Holme einer im Gleichgewicht befindlichen (regelmäßigen) Strickleiter bilden zwei gleichseitige Polygone fester und übereinstimmender Schränkung. Der von den zu einer Sprosse gehörigen Knotenebenen gebildete Winkel ist längs der ganzen Leiter konstant.*

3. Nunmehr soll der zur Leiter gehörige *Kräfteplan* nach den Regeln der graphischen Statik entwickelt werden. Bezeichne $\mathfrak{a}_i$ die in A_i angreifende, nach A_{i+1} gerichtete und positiv gezählte Spannkraft im linken Holm, analog $\mathfrak{b}_i$ die Kraft in der rechten Holmstrecke B_iB_{i+1}; $\mathfrak{c}_i$ sei schließlich die von A_i nach B_i orientierte Sprossenkraft (Fig. 1). Im Knoten A_i wirken danach die Kräfte $-\mathfrak{a}_{i-1}$, $\mathfrak{a}_i$, $-\mathfrak{c}_i$, im Gegenknoten B_i die Kräfte $-\mathfrak{b}_{i-1}$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$. Im Hinblick auf das bestehende Gleichgewicht haben beide Vektortripel die Summe Null und die sie geometrisch repräsentierenden (und gleichbezeichneten) Strecken lassen sich in Dreiecksform aneinanderreihen. Wir ordnen die beiden Dreiecke so an, daß sie die Seite $\pm\mathfrak{c}_i$ gemeinsam haben. Die folgenden Kraftdreiecke lassen sich dann längs der Seiten $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ anschließen, so daß auf diese Weise fortfahrend ein Kräfteplan in Gestalt einer *Doppelpyramide* entsteht, in welcher jedem Leiterstab eine parallele

[2]) G. T. BENNETT: *The skew isogram mechanism*, Proc. London Math. Soc. 13 (1914), 151—173.

[3]) Man drücke den Abstand einer Ecke von der gegenüberliegenden Knotenebene auf zwei Arten aus.

Kante entspricht und jeder Leiterknoten durch eine Dreiecksfläche vertreten ist (Fig. 1): Die gemeinsame Basis wird von den aneinandergereihten Bildvektoren der Sprossenkräfte $\mathfrak{c}_i$ gebildet, während die in je einer Spitze $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ zusammenlaufenden Mantelkanten die Holmkräfte $\mathfrak{a}_i$ bzw. $\mathfrak{b}_i$ repräsentieren.

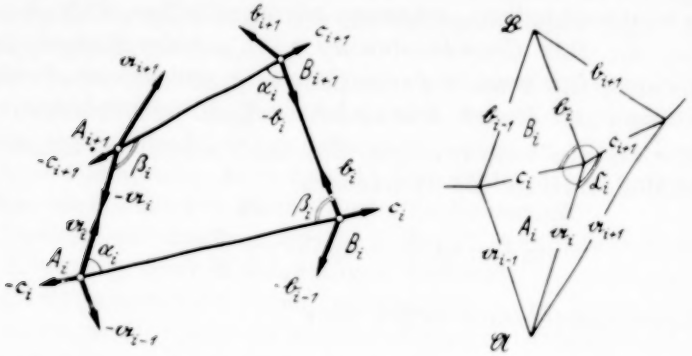

Fig. 1: Einzelmasche der Strickleiter und zugehöriger Ausschnitt des Kräfteplans.

Wir bezeichnen im i-ten Isogramm die bei A_i und B_{i+1} auftretenden Innenwinkel mit α_i, jene bei B_i und A_{i+1} mit β_i. Sie gehorchen der Beziehung [4])

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2} = \cos\frac{\gamma+\psi}{2} : \cos\frac{\gamma-\psi}{2} = \text{const}$$

und ihre Summe ist $\leqq 2\pi$. Dieselben Winkel stoßen in der dem Isogramm zugeordneten Ecke $\mathfrak{E}_i$ des Kräfteplanes zusammen: Alle an der Basis der Doppelpyramide auftretenden *Vierkante* sind mithin *achsensymmetrisch*. Die längs der Kanten gemessenen Außenwinkel stimmen überdies mit den Schränkwinkeln des Isogramms überein.

Satz 2. *Der zu einer im Gleichgewicht befindlichen Strickleiter gehörige Kräfteplan ist eine konvexe Doppelpyramide, deren Mäntel längs sämtlicher Kanten den gleichen Keilwinkel* $\pi-\psi$ *aufweisen und auch längs des Basispolygons unter einem konstanten Winkel* $\pi-\gamma$ *zusammenstoßen.*

4. Die Symmetrieachse des von $\mathfrak{E}_i$ ausstrahlenden Vierkants halbiert den Winkel der Kanten $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$, fällt also mit der Normale des durch $\mathfrak{E}_i$ gehenden *Drehellipsoids* Γ_i zusammen, das die Pyramidenspitzen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu Brennpunkten hat. Die Normale ist nun auf Grund der Fokaleigenschaften gemeinsame Hauptachse der ∞^1 Berührungskegel, die aus $\mathfrak{E}_i$ an sämtliche durch die Brennpunkte $\mathfrak{A}$ und

[4]) Man berechne die Normalprojektion der Diagonale A_iB_{i+1} auf die Symmetrale des Winkels $B_iA_iA_{i+1} = \alpha_i$ auf zwei Arten.

$\mathfrak{B}$ bestimmten Flächen 2. Grades gehen. Die beiden, ebenfalls zu der Flächennormale symmetrischen Kanten $\mathfrak{c}_i$ und $\mathfrak{c}_{i+1}$ gehen durch Spiegelung an Γ_i auseinander hervor und sind gegenüberliegende Erzeugende auf einem der genannten Kegel: Sie berühren mithin beide ein gewisses Ellipsoid Δ_i und ein gewisses Hyperboloid $\bar{\Delta}_i$ der durch die Brennpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ definierten konfokalen Schar. Zur nächsten Ecke $\mathfrak{C}_{i+1}$ weiterschreitend, erkennen wir unmittelbar, daß $\Delta_{i+1} = \Delta_i$ und $\bar{\Delta}_{i+1} = \bar{\Delta}_i$: *Der Grundkantenzug* $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots$ *der Doppelpyramide ist mithin einem bestimmten Drehellipsoid* Δ *und einem konfokalen Drehhyperboloid* $\bar{\Delta}$ *mit den Brennpunkten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *umschrieben.*

Es läßt sich nun weiter zeigen, daß auch sämtliche Ellipsoide Γ_i zusammenfallen. Zufolge (2) ist nämlich

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2},$$

und der Korrespondenzsatz liefert über

$$\sin\frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} : \sin\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} = \sin\frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} : \sin\frac{\alpha_2 + \beta_1}{2}$$

nach passender Erweiterung

$$\text{(4)} \qquad \frac{\sin\alpha_1 - \sin\beta_2}{\sin(\alpha_1 + \beta_2)} = \frac{\sin\alpha_2 - \sin\beta_1}{\sin(\alpha_2 + \beta_1)}.$$

Auf Grund des Sinussatzes in den Teildreiecken B_2 und A_2 haben wir dann mit $|\mathfrak{a}_i| = a_i$, $|\mathfrak{b}_i| = b_i$ und $|\mathfrak{c}_i| = c_i$

$$\frac{b_2 - b_1}{c_2} = \frac{a_1 - a_2}{c_2} \text{ oder } a_2 + b_2 = a_1 + b_1,$$

also allgemein

$$\text{(5)} \qquad a_i + b_i = \text{const.}$$

Der Grundkantenzug $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots$ *der Doppelpyramide ist mithin einem bestimmten Drehellipsoid* Γ *mit den Brennpunkten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *eingeschrieben.* Zusammenfassend gilt demnach

Satz 3. *Das Basispolygon der Doppelpyramide, die den Kräfteplan einer im Gleichgewicht befindlichen regelmäßigen Strickleiter darstellt, läßt sich als Weg eines Lichtstrahls auffassen, der an einem verlängerten Drehellipsoid, dessen Brennpunkte mit den Pyramidenspitzen zusammenfallen, wiederholt reflektiert wird.*

Oder in der Sprache der Statik:

Satz 4. *Bei einer im Gleichgewicht befindlichen regelmäßigen Strickleiter ist sowohl die Vektorsumme als auch die Betragssumme gegenüberliegender Holmspannungen längs der ganzen Leiter konstant.*

Da sich die Gleichungen (2) bis (5) auch in der umgekehrten Reihenfolge entwickeln lassen, so gilt als Umkehrung der Sätze 2 und 3 der auch an sich bemerkenswerte

Satz 5. *Wird das Wegpolygon eines wiederholt an einem eiförmigen Drehellipsoid reflektierten Lichtstrahls aus den beiden Brennpunkten projiziert, so entstehen zwei Pyramiden mit durchwegs gleichen Keilwinkeln, die auch längs des Lichtpolygons unter einem konstanten Winkel zusammentreffen.*

Daß eine solche Doppelpyramide stets als Kräfteplan einer regelmäßigen Strickleiter angesehen werden kann, liegt auf der Hand. Verläuft das Grundpolygon übrigens ganz in der Äquatorebene ($\alpha_i = \beta_i = \text{const}$, $a_i = b_i = \text{const}$), dann bildet die zugehörige Leiterform das einleitend erwähnte *Wendelflächenmodell*.

5. Denken wir uns die in Satz 2 und 3 genannte Doppelpyramide unter Erhaltung ihrer Kantenlängen *verknickt* — was ja bei jeder offenen Doppelpyramide sicher möglich ist — so kommen die Basisecken $\mathfrak{C}_i$ wegen (5) wiederum auf ein eiförmiges Drehellipsoid Γ' gleicher Hauptachsenlänge zu liegen, dessen Brennpunkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ durch die Neulagen der Pyramidenspitzen gegeben sind. Da die Seitenwinkel α_i, β_i der Basisvierkante unveränderlich sind, so bleiben die Vierkante ständig achsensymmetrisch. Die Symmetrieachsen hälften die Winkel der Brennstrahlpaare, sind also Normalen der Fläche Γ', und der Grundkantenzug ist der Weg eines wiederholt an Γ' gespiegelten Lichtstrahls. Zufolge Satz 5 ist daher auch die neue Gestalt der Doppelpyramide der Kräfteplan einer regelmäßigen Strickleiter, allerdings nicht mehr der ursprünglichen.

Die Außenwinkel ψ, γ der Vierkante ändern sich gemäß der zu (2) äquivalenten Formel

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha_i+\beta_i}{2} : \cos\frac{\alpha_i-\beta_i}{2} = \text{const}.$$

Die Neuwerte ψ', γ' lassen sich daher nach dem Vorgang von R. Sauer[1]) etwa mit Hilfe eines „*Knickparameters*“ λ darstellen durch

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\psi'}{2} = \lambda\cdot\operatorname{tg}\frac{\psi}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\gamma'}{2} = \lambda^{-1}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Mit den Schränkwinkeln ψ' und γ' ist dann aber auf Grund der Bennett-Relation (1) auch das Abmessungsverhältnis der Leiter bekannt. Abgesehen von einem willkürlichen Maßstabsfaktor betragen die neuen Sprossenabstände und -längen dann

$$\text{(8)} \qquad h' = \frac{h}{(1+\lambda^2)+(1-\lambda^2)\cos\psi},\quad c' = \frac{c}{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos\gamma}.$$

6. Von besonderer Bedeutung ist die zu $\lambda = 0$ gehörige *platte Grenzform*: Hier erscheint die Doppelpyramide wegen $\psi' = 0$ und

$\gamma' = \pi$ vollständig in die Ebene ausgebreitet und das verebnete Basispolygon ist der Weg eines wiederholt an einer *Ellipse* reflektierten Lichtstrahls (Fig. 2). Diese einfach zu konstruierende Sonderform stellt das (doppelt überdeckte) *Netz* der Doppelpyramide dar und kann zur Herstellung eines verknickbaren Kartonmodells derselben dienen[5]).

Satz 6. *Bei der Verebnung der Doppelpyramide aus Satz 2 und 3 geht das Basispolygon in ein ebenes Vieleck über, das einer Ellipse eingeschrieben und einer konfokalen Ellipse umgeschrieben ist. Die Verbindungen der Ecken mit dem einen oder anderen Brennpunkt entsprechen dabei den Mantellinien.*

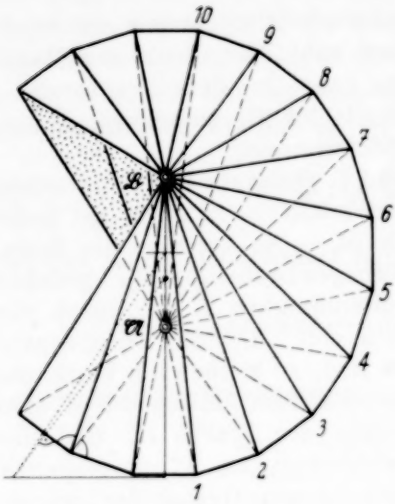

Fig. 2: Platte Grenzform als Netz der Doppelpyramide.

Es existiert übrigens noch eine zweite platte Knickform der Doppelpyramide, nämlich für $\lambda = \infty$ ($\psi'' = \pi$, $\gamma'' = 0$). Auch hier tritt ein einer Ellipse eingeschriebenes Reflexionspolygon auf, das jedoch einer konfokalen Hyperbel umschrieben ist und die Hauptachse im Zickzackwege fortwährend überschreitet. Diese Grenzlage ließe sich mit dem Kartonmodell nur nach Trennung der beiden Mäntel verwirklichen, indem man dann jeden Teil für sich „einwickelt".

Zu den beiden platten Grenzformen der Kräftepyramide gehören natürlich auch *ebene Gleichgewichtslagen* der Strickleiter. Die Leitermaschen bilden dabei überschlagene Vierecke („Antiparallelogramme"), und zwar überkreuzen einander für $\lambda = 0$ die Sprossen ($h' < s'$), für $\lambda = \infty$ hingegen die Holme ($h'' > s''$).

Hervorgehoben sei schließlich noch, daß sich nunmehr auch ein Ausgangspunkt für eine bequeme *darstellend-geometrische Behandlung* des vorliegenden Fragenkreises bietet, denn aus der platten Grenzform läßt sich eine nicht ausgeartete Gestalt der Doppelpyramide unschwer rekonstruieren, und mit deren Hilfe ist dann auch die zugehörige Gleichgewichtsform der Strickleiter schrittweise zu entwickeln.

---

[5]) Zur genauen Festlegung der meist schleifenden Schnitte des Lichtstrahls mit der Ellipse bediene man sich des konjugierten Durchmessers, der die betreffende Sehne halbiert. Er läßt sich mittels einer Scheiteltangente und des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes schnell angeben, wenn man weiß, daß jedes aus zwei konjugierten Durchmessern und einer Scheiteltangente gebildete Dreieck seinen Höhenschnittpunkt im Scheitelkrümmungszentrum hat (vgl. Fig. 2).

Auf diese Weise entstand Fig. 3, die eine Abbildung in Grund- und Aufriß darstellt.

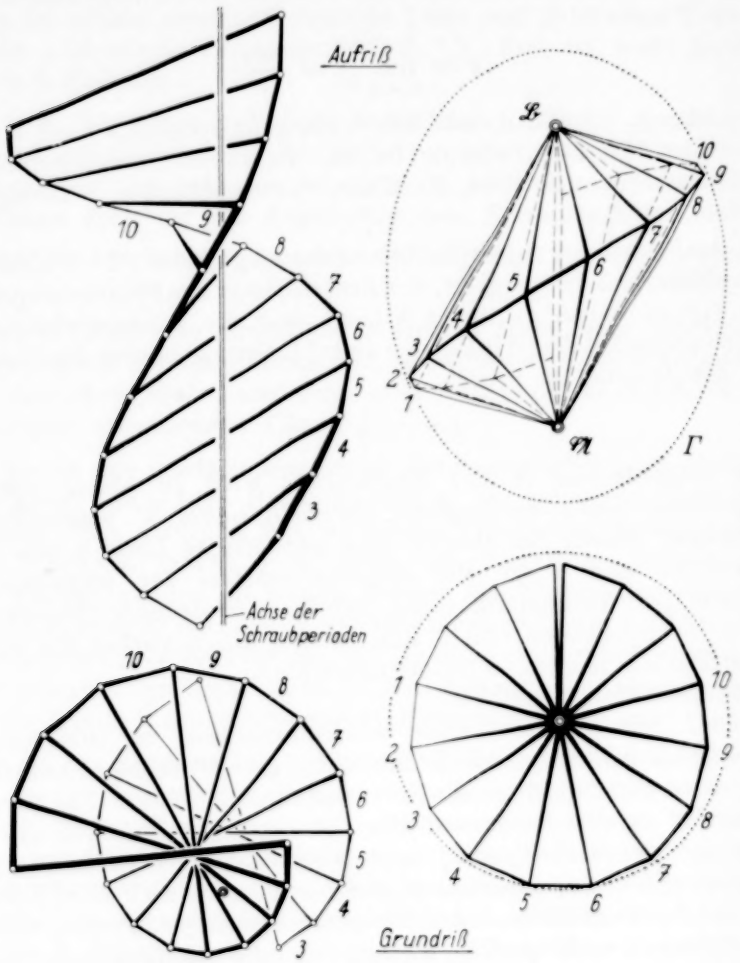

Fig. 3: Gleichgewichtslage einer (gewichtslosen) Strickleiter samt zugehöriger Kräftepyramide.

7. Abschließend vollziehen wir nunmehr — wie am Ende jeder differenzengeometrischen Untersuchung — den von vornherein beabsichtigten Grenzprozeß $h \to 0$, der bei festgehaltenem Schränkungswert (1) gleichzeitig $\psi \to 0$ bedingt. Wir gelangen damit zu einer *„kontinuierlichen Strickleiter"* mit *gekrümmten Holmen*, bei welcher die Sprossen die Erzeugendenschar einer gewissen *Strahlfläche (Regelfläche)* Σ erfüllen. Da die Knotenebenen zu den *Schmiegebenen* der Holmkurven werden, so stellen letztere zwei im festen Abstande c ver-

laufende *Schmieglinien (Haupttangentenkurven)* der Fläche Σ dar; je zwei zusammengehörige Schmiegebenen schließen den festen Winkel $-\gamma$ ein. Die beiden Holmkurven sind überdies durch *konstante Torsion* gleichen Wertes

$$\tau = \lim_{h \to 0} \frac{\psi}{h} = \frac{\sin \gamma}{c} \tag{9}$$

ausgezeichnet. Sie bilden nach allem ein ganz spezielles jener Kurvenpaare fester Windung, wie sie bei der *Bäcklund-Transformation* der pseudosphärischen Flächen als Paare entsprechender Schmieglinien auftreten.

Da das Gemeinlot zweier Nachbarsprossen gegen die *Zentraltangente* der Strahlfläche Σ konvergiert, der *Zentralpunkt* aus Symmetriegründen in die Sprossenmitte zu liegen kommt und die Tangentialebenen in den Sprossenenden den Winkel $-\gamma$ einschließen, so besitzt die Sprossenfläche den *konstanten Drall*

$$p = -\frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \tag{10}$$

Die Doppelpyramide des Kräfteplans wird zu einem von den Brennpunkten eines verlängerten *Drehellipsoides* Γ ausstrahlenden *Doppelkegel*, dessen Basiskurve eine *geodätische Linie* g von Γ ist. Letzteres ist eine Folge der Achsensymmetrie der ursprünglichen Vierkante: Die Verbindungsebene aufeinanderfolgender Grundkanten wird zur Schmiegebene von g und enthält schon vorher die mit der Symmetrieachse identische Flächennormale[6]).

Zusammenfassend gilt also

Satz 7. *Die Sprossen einer kontinuierlichen, im Gleichgewicht befindlichen Strickleiter fester Breite bilden eine Strahlfläche konstanten Dralls, deren Striktionslinie die Sprossenmitten verbindet. Die Sprossen sind parallel zu den Tangenten einer gewissen geodätischen Linie auf einem eiförmigen Drehellipsoid. Die Holme der Leiter bilden ein Bäcklund-Paar zweier Kurven konstanter gleicher Torsion und sind Schmieglinien der Sprossenfläche. Ihre Tangentenrichtkegel werden von den Brennstrahlen des Ellipsoids erzeugt, die die Geodätische g treffen.*

Auf Grund des bekannten periodischen Verlaufs der geodätischen Linie g läßt sich auch eine gewisse *Periodizität der Strickleiter* vorhersagen. Die beiden Holmkurven werden im allgemeinen durch gewisse Schraubungen in sich bzw. ineinander transformiert. Im besonderen Fall der zu $\lambda = 0$ gehörigen ebenen Gleichgewichtsformen sind es Schiebungen.

---

[6]) Einleuchtend wäre auch die Berufung auf das Fermatsche Prinzip, wonach das Licht im einheitlichen Medium den kürzesten Weg nimmt: Der das Basispolygon nach Satz 3 darstellende Weg des reflektierten Lichtstrahls verläuft ursprünglich zwischen zwei konfokalen Ellipsoiden Γ und Δ und wird mit $\Delta \to \Gamma$ zum kürzesten Weg auf Γ.

8. Die beiden Mäntel des vorhin besprochenen Doppelkegels stoßen nach Satz 5 längs ihrer Grundlinie g unter dem konstanten Winkel $\pi - \gamma$ zusammen, der an jeder Stelle durch die Schmiegebene gehälftet wird: g ist mithin *pseudogeodätische Linie* auf jedem der Teilkegel, also eine *„bikonische Pseudogeodätische“* [7]). Neu ist wohl auch der aus Satz 6 fließende

Satz 8. *Wird eine auf einer Drehfläche 2. Grades gezogene geodätische Linie aus einem Brennpunkt projiziert und der Projektionskegel verebnet, so geht sie in einen Kegelschnitt gleicher Hauptachsenlänge über, der die Kegelspitze zum Brennpunkt hat.*

Dieser Sachverhalt kann auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Satz 9. *Rollt eine Drehfläche 2. Grades längs einer geodätischen Linie geradlinig auf einer Ebene fort, so beschreibt jeder Flächenbrennpunkt eine ebene Bahn, und zwar eine* Delaunaysche *Kurve in einer die Rollspur enthaltenden Ebene* [8]).

9. Um zu den geodätischen Linien des *zweischaligen Hyperboloides* zu gelangen, hätte man Holmspannungen verschiedenen Vorzeichens zuzulassen, was natürlich nur zu *labilen* Gleichgewichtslagen führen würde. Übrigens taucht auch unter der bisherigen Voraussetzung bloßer Zugspannungen in beiden Holmen ein *Stabilitätsproblem* auf, wie ein Experiment mit dem Wendelflächenmodell ganz auffällig zeigt: Bei fortschreitender Verwindung, die die Höhe zwangsläufig verkleinert, erfolgt plötzlich ein Umschlagen in eine nahezu ebene Gleichgewichtsform, die keine Wendelfläche mehr repräsentiert.

Um zu den geodätischen Linien des *Drehparaboloides* zu gelangen, wären unendlich große Spannungen in einem der Holme zuzulassen, der unter ihrer Einwirkung eine vollkommen *geradlinige Gestalt* annehmen würde. Die zweite Holmkurve bleibt gekrümmt und ist als Bäcklund-Transformierte einer Geraden identisch mit der Schmieglinienform einer jener speziellen Schraub- oder Drehflächen konstanter negativer Krümmung, die durch Verschraubung oder Drehung einer

---

[7]) *„Pseudogeodätische Linien“* nannte der Verfasser jene Flächenkurven, deren Schmiegebenen gegen die Trägerfläche unter einem festen, jedoch nicht rechten Winkel geneigt sind. Von den *bikonischen Pseudogeodätischen* handelt die Arbeit: „Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind“, Mh. Math. 54 (1950), 55–70. Daß sich unter diesen merkwürdigen Kurven auch die echten Geodätischen der Drehflächen 2. Grades finden, wurde schon früher gezeigt: „Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades“, Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. 15 (1950).

[8]) Nach Delaunay werden bekanntlich die von den Brennpunkten eines auf einer Geraden rollenden Kegelschnittes beschriebenen Bahnkurven benannt. Im Falle der Parabel ergibt sich die Kettenlinie.

gemeinen Traktrix um die Asymptote entstehen. Diese Holmkurven lassen sich mittels hyperbolischer Funktionen noch elementar darstellen, während zur Beschreibung der allgemeinen Gleichgewichtslage der Strickleiter elliptische Integrale oder Funktionen notwendig wären, die bereits in die geodätischen Linien der zugehörigen Drehflächen 2. Grades (mit Mittelpunkt) eingehen.

(Eingegangen am 11. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 23—54 (1951).

Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren.

Von

Alexander Peyerimhoff in Tübingen.

Einleitung.

In seiner Arbeit „Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen" gab I. Schur [20][1]) ohne Beweis den folgenden Satz an:

Wenn k und l zwei gegebene, nicht negative ganze Zahlen sind, ist die Reihe $\sum_\nu a_\nu \varepsilon_\nu$ genau dann für alle C_k-summierbaren Reihen $\sum_\nu a_\nu$ ihrerseits C_l-summierbar, wenn die Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ die Bedingungen

$$1^\circ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\Delta^{k+1} \varepsilon_n| < +\infty \qquad \text{und} \qquad 2^\circ \quad \varepsilon_n = \begin{cases} O(n^{l-k}) & \text{für } l \leqq k \\ O(1) & \text{für } l > k \end{cases}$$

erfüllt[2]).

In der vorliegenden Arbeit soll die entsprechende Frage für zwei beliebige permanente Limitierungsverfahren A und B behandelt werden, also die Frage nach den genauen Bedingungen, die eine Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ erfüllen muß, damit für jede A-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ die Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ B-summierbar ist.

Wenn $\{\varepsilon_\nu\}$ eine Folge mit dieser Eigenschaft ist, sollen die ε_ν *Summierbarkeitsfaktoren* und speziell, wenn B konvergenzgleich ist, *Konvergenzfaktoren* genannt werden.

Gleichzeitig wollen wir die entsprechende Frage für Folgen $\{\varepsilon_\nu\}$ aufwerfen, die bewirken, daß für jede A-limitierbare Folge $\{s_\nu\}$ die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ B-summierbar ist.

Zur Behandlung dieser Probleme werden Hilfsmittel der Funktionalanalysis herangezogen, durch die in § 3 eine notwendige Bedingung für die Summierbarkeitsfaktoren ε_ν aufgestellt wird, die wir kurz als Funktionalbedingung bezeichnen. In § 5 wird dann untersucht, in welchen Fällen diese Bedingung auch hinreichend ist. § 7 bringt Anwendungen auf die Cesàroschen Verfahren und auf die Verfahren bewichteter arithmetischer Mittel, nachdem in § 6 gezeigt ist, daß die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der allgemeinen Sätze auf diese Verfahren erfüllt sind. In den §§ 8 und 9 werden Rieszsche Ver-

[1]) Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Beweise (auch für nicht ganze k und l) haben L. S. Bosanquet [6], [7], [8] und K. Knopp [14] angegeben.

fahren behandelt. Ähnliche funktionalanalytische Methoden sind von K. Zeller [22] in seiner Arbeit „Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren" verwendet worden.

§ 1.

Bezeichnungen und Definitionen.

Alle im folgenden vorkommenden Matrizen sind von der Form $A = (a_{tv})$, wobei a_{tv}[3]) für alle t aus einer Zahlenmenge T mit einem Häufungspunkt t_0[4]) und für $v = 0, 1, \ldots$ erklärt ist. Wenn T aus den natürlichen Zahlen besteht (in diesem Falle ist $+\infty$ für t_0 einzusetzen), so nennen wir A eine gewöhnliche Matrix. Einer Zahlenfolge $a = \{a_v\}$[5]) wird durch die Matrix $A = (a_{tv})$ die Funktion $A_t(a) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{tv} a_v$ zugeordnet, vorausgesetzt, daß $\sum_{v=0}^{\infty} a_{tv} a_v$ für alle $t \in T$ konvergiert.

Die Matrix $A = (a_{tv})$ heißt FF-permanent, wenn $A_t(a)$ für alle konvergenten Folgen $a = \{a_v\}$ und alle $t \in T$ existiert, und wenn stets gilt:

$$\lim_{t \to t_0} A_t(a) = \lim_{v \to \infty} a_v .$$

Die Matrix $A = (a_{tv})$ heißt RF-permanent, wenn $A_t(a)$ für alle Folgen $a = \{a_v\}$ mit konvergenter summatorischer Folge und alle $t \in T$ existiert, und wenn stets gilt:

$$\lim_{t \to t_0} A_t(a) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \text{[6])}.$$

Wenn im folgenden nur kurz von einer Matrix gesprochen wird, so ist darunter stets eine FF- bzw. RF-permanente Matrix zu verstehen.

Jeder FF-permanenten Matrix A ordnen wir zwei Wirkfelder zu. Das mit $A(f, c)$ bezeichnete Wirkfeld besteht aus den Folgen $a = \{a_v\}$, für die $A_t(a)$ für alle $t \in T$ und $\lim_{t \to t_0} A_t(a)$ existiert. Mit $A(f, n)$ bezeichnen wir die Teilmenge derjenigen Folgen $a = \{a_v\}$, für die $A_t(a)$ für alle $t \in T$ existiert und $\lim_{t \to t_0} A_t(a) = 0$ ist. f soll andeuten, daß A FF-per-

---

[3]) Die a_{tv} sind reelle Zahlen. Wir wollen im folgenden unter Zahlen stets reelle Zahlen verstehen.

[4]) t_0 darf auch $\pm\infty$ sein.

[5]) Zahlenfolgen werden hier mit kleinen lat. Buchstaben bezeichnet.

[6]) Eine Matrix $A = (a_{tv})$ kann nicht gleichzeitig FF- und RF-permanent sein. Für die FF-Permanenz ist notwendig, daß $\lim_{t \to t_0} a_{tv} = 0$ für $v = 0, 1, \ldots$ gilt, während aus der RF-Permanenz die Bedingung $\lim_{t \to t_0} a_{tv} = 1$ für $v = 0, 1, \ldots$ folgt.

manent ist, während durch c und n zum Ausdruck gebracht wird, daß $A_t(a)$ für $t \to t_0$ konvergiert bzw. gegen Null strebt.

Für RF-permanente Matrizen A besteht das mit $A(r, c)$ bezeichnete Wirkfeld aus der Gesamtheit aller Folgen $a = \{a_\nu\}$, für die $A_t(a)$ für alle $t \in T$ und $\lim A_t(a)$ existiert. r soll die RF-Permanenz von A andeuten.

Einem Limitierungsverfahren, das als Matrixverfahren aufgefaßt werden kann, ordnet man i. a. zwei Matrizen zu; die erste ist FF-permanent, die zweite RF-permanent. Die Unterscheidung zwischen FF- und RF-Permanenz ist für die folgenden Überlegungen wesentlich. Für eine Reihe spezieller Matrixverfahren sind nun feste Bezeichnungen im Gebrauch (C_k, H^k u. ä.). In den Symbolen für die Wirkfelder der zu diesen Verfahren gehörigen FF- bzw. RF-permanenten Matrizen wollen wir die folgenden Bezeichnungen verwenden:

V sei die für ein bestimmtes Verfahren übliche Bezeichnung. Unter $V(x, y)$ ($x = f$ oder r, $y = c$ oder n) ist dann folgendes zu verstehen: Man bildet mit der zum Verfahren V gehörigen Matrix A, die in der durch x angegebenen Form permanent ist ($x = f$: FF-Permanenz, $x = r$: RF-Permanenz), das Wirkfeld $A(x, y)$ und setzt $V(x, y) = A(x, y)$. In dieser Weise sind Ausdrücke wie $C_k(f, c)$, $H^k(r, c)$ usw. zu verstehen.

Wirkfelder können im Sinne der Funktionalanalysis als Vektorräume[7]) aufgefaßt werden, wenn die Addition zweier Folgen und die Multiplikation einer Folge mit einer Zahl in natürlicher Weise erklärt wird.

Jedem Element $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ wird durch die (FF-permanente) Matrix A als Bild eine Funktion $A_t(a)$ zugeordnet. Der Bildraum des Wirkfeldes $A(f, c)$ besteht aus den Funktionen $A_t(a)$ mit $a \in A(f, c)$. Wir wollen diesen Bildraum mit $A(A(f, c))$ und die Funktion $A_t(a)$, als Element des Bildraumes aufgefaßt, mit $A(a)$ bezeichnen. Ebenso sind die Bildräume $A(A(f, n))$ und $A(A(r, c))$ erklärt.

Wir werden in dieser ganzen Arbeit, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird, nur solche Matrizen betrachten, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

B_1) $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ ist ein Vektorraum, wenn die Addition zweier Funktionen und die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl in natürlicher Weise erklärt wird. Dabei soll $A(a) = A(b)$ durch $A_t(a) = A_t(b)$ für alle $t \in T$ erklärt sein.

B_2) Aus $a \neq b$ folgt stets $A(a) \neq A(b)$.

B_3) Mit $\|A(a)\| = \overline{\inf_{t \in T}} |A_t(a)|$ ist $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ ein Banach-Raum.

Wenn $A(A(f, c))$ die Bedingungen B_1 und B_3 erfüllt, ist auch $A(A(f, n))$ mit der in $A(A(f, c))$ erklärten Norm ein normierter Vektorraum.

---

[7]) S. Banach [3], im folgenden kurz als Banach zitiert, S. 26.

B_1, B_2 und B_3 sind insbesondere bei normalen Matrizen[8]) erfüllt, denn der Raum s_c der konvergenten Folgen ist mit $\|x\| = \operatorname{fin}_n |x_n|$ für $x = \{x_n\} \in s_c$ ein BANACH-Raum[9]).

Für $x = \{x_n\} \in s_c$ ist

$$f(x) = \alpha \lim_{n \to \infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$$

und beliebigem α ein lineares[10]) Funktional in s_c und jedes lineare Funktional in s_c läßt sich so darstellen (Vgl. BANACH, S. 66—67.).

Der Raum s_n aller Nullfolgen ist mit der in s_c erklärten Norm ein BANACH-Raum. Die linearen Funktionale in s_c mit $\alpha = 0$ sind genau alle linearen Funktionale in s_n (Vgl. BANACH, Kap. 4, Satz 2, S. 55.).

Mit e bezeichnen wir die Folge, deren Glieder alle gleich 1 sind, und mit $e^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die Folgen, deren n-tes Glied gleich 1 ist, während die anderen Glieder alle Null sind.

Einen normierten Folgenraum X mit der Eigenschaft:

Aus $x^{(n)} = \{x_\nu^{(n)}\} \in X$, $\|x^{(n)}\| \to 0$ für $n \to \infty$ folgt $|x_\nu^{(n)}| \to 0$ für $n \to \infty$ und jedes feste $\nu = 0, 1, \ldots$, nennen wir einen Raum, in dem „gliedweise Konvergenz" vorhanden ist.

§ 2.

Über Wirkfelder.

Für die Normierung der Wirkfelder benötigen wir das folgende

Lemma 2.1. Voraussetzung. *X sei ein normierter Vektorraum und Y ein Vektorraum. $S(x)$ sei ein additiver, homogener und eineindeutiger Operator, der X auf Y abbildet: $y = S(x)$.*

Behauptung. *Man erhält eine Norm in Y, wenn man für jedes $y \in Y$ als Norm die Norm des Urbildes x von y nimmt, also $\|y\| = \|x\|$ für $x = S^{-1}(y)$ setzt. Wenn X ein BANACH-Raum ist, so ist Y mit dieser Norm ebenfalls ein BANACH-Raum.*

Die Behauptung ist fast selbstverständlich, wenn man beachtet, daß die Umkehrung $S^{-1}(y)$ von $S(x)$ wieder additiv und homogen ist.

Aus Lemma 2.1 folgt unmittelbar der

Satz 2.2. *$A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ist ein BANACH-Raum, wenn man für jedes $a \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$*

$$\|a\| = \operatorname{fin}_{\iota \in T} |A_\iota(a)|$$

setzt[11]).

---

[8]) Das sind gewöhnliche Dreiecksmatrizen mit nicht verschwindenden Diagonalgliedern.

[9]) Wenn A normal ist, ist $A(A(f, c)) = s_c$ bzw. $A(A(r, c)) = s_c$.

[10]) Lineare Funktionale sind additive, homogene und stetige Funktionale.

[11]) Die Addition zweier Folgen und die Multiplikation einer Folge mit einer Zahl wird in natürlicher Weise erklärt.

Beweis. Die Matrix A kann als additiver, homogener und (wegen B_2) eineindeutiger Operator $A(a)$ aufgefaßt werden. Wendet man Lemma 2. 1 an, wobei für $S(x)$ der zu $A(a)$ inverse Operator $A^{-1}(a)$ einzusetzen ist, so folgt wegen B_1 und B_3 sofort die Behauptung.

Zusatz. Wegen $A(f, n) < A(f, c)$ ist der Raum $A(f, n)$ mit der in $A(f, c)$ erklärten Norm ein normierter Vektorraum.

Wirkfelder werden im folgenden stets so, wie in Satz 2. 2 angegeben, normiert.

Lemma 2. 3. *Voraussetzungen wie bei Lemma* 2. 1. *Y sei nach Lemma* 2. 1 *normiert. $f(x)$ sei ein lineares Funktional in X.*

Behauptung. *$h(y) = f(S^{-1}(y))$ ist ein lineares Funktional in Y, und jedes lineare Funktional in Y kann so dargestellt werden.*

Beweis. Es ist

$$|h(y)| \leqq \|f\| \, \|S^{-1}(y)\| = \|f\| \, \|y\| \text{ [12]}.$$

Also ist $h(y)$ ein lineares Funktional in Y. Nun sei $h(y)$ ein beliebiges lineares Funktional in Y. Dann gilt

$$|h(S(x))| \leqq \|h\| \, \|S(x)\| = \|h\| \, \|x\| .$$

Also ist $f(x) = h(S(x))$ ein lineares Funktional in X und damit

$$h(y) = f(S^{-1}(y)).$$

Wenn im Bildraum $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ alle linearen Funktionale bekannt sind, dann können mit Hilfe von Lemma 2. 3 alle linearen Funktionale im Wirkfeld $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ angegeben werden.

Speziell für normale Matrizen gilt der

Satz 2. 4. Voraussetzung. *A sei eine normale Matrix.*

Behauptung. *Im Raum $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ist*

$$f(a) = \alpha \lim_{n \to \infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a) \quad (a \in A(f, c) \text{ bzw. } \in A(r, c))$$

mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und beliebigem α ein lineares Funktional und jedes lineare Funktional läßt sich so darstellen [13].

Beweis. In s_c kann man alle linearen Funktionale (§ 1) angeben. Lemma 2. 3 liefert dann sofort die Behauptung.

Zusatz. Die linearen Funktionale in $A(f, c)$ mit $\alpha = 0$ sind genau alle linearen Funktionale in $A(f, n)$. Das folgt aus Lemma 2. 3 mit den in § 1 angegebenen linearen Funktionalen in s_n.

Im folgenden § werden wir in den Wirkfeldern gliedweise Konvergenz benötigen. Bei gewöhnlichen Matrizen folgt die gliedweise Konvergenz im Wirkfeld aus B_2 und B_3.

Satz 2. 5. Voraussetzung. *A sei eine gewöhnliche Matrix.*

---

[12] $\|f\|$ ist die Norm des linearen Funktionals $f(x)$. Vgl. BANACH, S. 54.

[13] Vgl. auch K. ZELLER [22], Satz 5. 2.

Behauptung. *Im Raume $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ist gliedweise Konvergenz vorhanden.*

Beweis. Wegen B_2 und B_3 gibt es in $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ lineare Funktionale f_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$, so daß

$$a_\nu = f_\nu(A(a)) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$ gilt (Banach, Kap. 3, Satz 10, S. 47.). Es sei $a^{(n)} = \{a_\nu^{(n)}\} \in A(f, c)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ bzw. $\in A(r, c)$ und $\|a^{(n)}\| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt $\|A(a^{(n)})\| = \|a^{(n)}\| \to 0$ für $n \to \infty$ und deshalb $a_\nu^{(n)} = f_\nu(A(a^{(n)})) \to 0$ für $n \to \infty$ und $\nu = 0, 1, \ldots$. Das war aber nachzuweisen.

§ 3.

Die Funktionalbedingung.

In diesem § wird eine notwendige Bedingung für Summierbarkeitsfaktoren abgeleitet.

$B = (b_{\mu\nu})$ bedeutet in diesem § stets eine RF-permanente Matrix, von der nicht gefordert wird, daß sie die Bedingungen B_1, B_2 und B erfüllt.

Um unnötig komplizierte Formulierungen zu vermeiden, wollen wir die folgenden Bezeichnungen einführen:

Die ε_ν der Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ heißen *$(A, B)_f$-Summierbarkeitsfaktoren*, wenn für alle $\{a_\nu\} \in A(f, c)$ stets $\{a_\nu \varepsilon_\nu\} \in B(r, c)$ gilt.

Die ε_ν der Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ heißen *$(A, B)_r$-Summierbarkeitsfaktoren*, wenn für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$ stets $\{a_\nu \varepsilon_\nu\} \in B(r, c)$ gilt[14]). In dem Spezialfall der Konvergenzgleichheit von B nennen wir die ε_ν $(A, C)_f$- bzw. $(A, C)_r$-*Konvergenzfaktoren*.

Lemma 3.1. Voraussetzung. *X sei ein Banach-Raum, Y sei ein normierter Vektorraum. Auf X sei eine Folge linearer Operatoren $S_n(x)$ mit $S_n(x) \in Y$ für jedes $x \in X$ $(n = 0, 1, \ldots)$ erklärt. Für jedes $x \in X$ soll $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x)$ existieren.*

Behauptung. *$S(x)$ ist ein linearer Operator.*

Beweis. Dieser Satz ist ein Spezialfall von Banach, Kap. 1, Satz 4, S. 23.

Lemma 3.2. Voraussetzung. *X sei ein Banachscher Folgenraum mit gliedweiser Konvergenz.*

Behauptung. I. *Für jede natürliche Zahl k und für jede fest gewählte Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ ist*

$$f_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu \varepsilon_\nu \qquad (x = \{x_\nu\} \in X)$$

ein lineares Funktional in X.

---

[14]) Der Index f bzw. r bezieht sich auf A. B ist in jedem Falle RF-permanent.

II. *Wenn* $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \varepsilon_\nu$ *für alle* $x \in X$ *konvergiert, dann ist* $f(x)$ *ein lineares Funktional in* X [15]).

Beweis. I. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der gliedweisen Konvergenz in X.

II. Es ist $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.1.

Satz 3.3. Voraussetzung. *A sei eine Matrix, in deren Wirkfeld $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ gliedweise Konvergenz vorhanden ist.*

Behauptung. *Damit die* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ $(A, B)_f$- *bzw.* $(A, B)_r$-*Summierbarkeitsfaktoren sind, ist notwendig, daß es in $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ gibt, so daß*

$$(\mathrm{F}): \qquad \varepsilon_n = f(e^{(n)}) \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots$$

ist.

Beweis. Wenn die ε_ν $(A, B)_f$-Summierbarkeitsfaktoren sind, existiert $B_t(a, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{t\nu} \varepsilon_\nu) a_\nu$ für jedes $t \in T$ und für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$. Nach Lemma 3.2 ist also $B_t(a, \varepsilon)$ für jedes $t \in T$ ein lineares Funktional in $A(f, c)$. $\lim_{t \to t_0} B_t(a, \varepsilon) = f(a)$ existiert für alle $a \in A(f, c)$ und ist nach Lemma 3.1 ein lineares Funktional in $A(f, c)$. Mit $a = e^{(n)}$ folgt

$$f(e^{(n)}) = \lim_{t \to t_0} B_t(e^{(n)}, \varepsilon) = \lim_{t \to t_0} b_{tn} \varepsilon_n = \varepsilon_n,$$

da $\lim_{t \to t_0} b_{tn} = 1$ für $n = 0, 1, \ldots$ ist.

In genau derselben Weise schließt man, wenn A RF-permanent ist.

Wir bezeichnen die Bedingung (F) als „*Funktionalbedingung*".

Zusatz. Die Bedingung (F) hängt gar nicht von der Matrix B ab, insbesondere ergibt sich (F) als notwendige Bedingung für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$, wenn man für B die RF-permanente Matrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & 1 & 0 & 0 & . \\ 1 & 1 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

wählt.

An Satz 3.3 anknüpfend können wir folgende Frage aufwerfen: Wenn die ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 $(A, B)_f$-Summierbarkeitsfaktoren sind, wenn es also in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \ldots$ gibt, ist dann $\lim_{t \to t_0} B_t(a, \varepsilon) = f(a)$ für alle $a \in A(f, c)$?

---

[15]) Vgl. K. Zeller [22], Satz 4.4.

Dieselbe Frage können wir für ein RF-permanentes A stellen.

Wir werden zeigen, daß diese Fragen für eine Klasse besonders wichtiger Matrizen, nämlich die perfekten Matrizen (Definition s. unten), positiv zu beantworten ist, für FF-permanente Matrizen allerdings mit folgender Einschränkung: Wenn man alle linearen Funktionale in $A(f, c)$ herausgreift, für die die Bedingung (F)[16]) erfüllt ist, dann gibt es in dieser Gesamtheit eines — wir bezeichnen es mit $F(a)$ —, für das $\lim_{t \to t_0} B_t(a, \varepsilon) = F(a)$ für alle $a \in A(f, c)$ gilt.

Eine FF-permanente Matrix A, welche die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 erfüllt, nennen wir perfekt, wenn die Folgen e und $e^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ in $A(f, c)$ eine Grundmenge[17]) bilden.

Eine RF-permanente Matrix A, welche die Bedingungen B_2, B_3 und B_3 erfüllt, nennen wir perfekt, wenn die Folgen $e^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ in $A(r, c)$ eine Grundmenge bilden.

Zusatz. Bei Banach, Kap. 5, S. 90, ist Perfektheit nur für gewöhnliche FF-permanente Matrizen mit $A(A(f, c)) = s_c$, die die Bedingung B_2 erfüllen, erklärt. Die dort angegebene Definition ist mit der hier genannten äquivalent (Vgl. Satz 4. 2.).

Nicht perfekte Matrizen sind aus verschiedenen Gründen als „pathologisch" zu bezeichnen.

In dem folgenden Satz 3. 4 ist $\{\varepsilon_\nu\}$ eine Folge von $(A, B)_f$-Summierbarkeitsfaktoren. Es gibt dann in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \ldots$. Es sei $g(a)$ ein lineares Funktional in $A(f, c)$ mit $g(e^{(n)}) = 0$ für $n = 0, 1, \ldots$ und $g(e) = f(e) - \lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu$[18]). Wenn A perfekt ist, gibt es genau ein derartiges lineares Funktional $g(a)$ in $A(f, c)$. Die Existenz folgt aus Banach, S. 57, Lemma, wenn man — mit den dort verwendeten Bezeichnungen — für G den Raum $A(f, n)$ wählt. Die Eindeutigkeit folgt aus Banach, Kap. 4, Satz 7, S. 58. Mit $F(a)$ bezeichnen wir das lineare Funktional $f(a) - g(a)$.

Satz 3.4. Voraussetzung. *Die Matrix A sei FF-permanent und perfekt. Die ε_ν seien $(A, B)_f$-Summierbarkeitsfaktoren.*

Behauptung. *Für jedes $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ ist*

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu = F(a).$$

---

[16]) Für eine bestimmte Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ von Summierbarkeitsfaktoren.

[17]) Die Menge $\overline{X}$ bildet in dem normierten Raum X eine Grundmenge, wenn jedes Element von X durch Linearkombinationen aus Elementen von $\overline{X}$ beliebig genau approximiert werden kann. Vgl. Banach, S. 58. Grundmenge = ensemble fondamental.

[18]) $\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu$ existiert, wenn die ε_ν $(A, B)_f$-Summierbarkeitsfaktoren sind, da doch $e \in A(f, c)$ ist.

Beweis. $h(a) = F(a) - \lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ ist ein lineares Funktional in $A(f, c)$. Es ist $h(e^{(n)}) = \varepsilon_n - \varepsilon_n = 0$ für $n = 0, 1, \ldots$ und

$$h(e) = f(e) - g(e) - \lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu = 0.$$

$h(a)$ verschwindet auf einer Grundmenge des Raumes $A(f, c)$ und damit im ganzen Raum (Banach, Kap. 4, Satz 7, S. 58.). Also ist $h(a) = 0$ für alle $a \in A(f, c)$.

Satz 3.5. Voraussetzung. *Die Matrix A sei RF-permanent und perfekt. Die ε_ν seien $(A, B)_r$-Summierbarkeitsfaktoren, so daß es also in $A(r, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \ldots$ gibt.*

Behauptung. *Für jedes $a = \{a_\nu\} \in A(r, c)$ ist* $\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu = f(a)$.

Beweis. $h(a) = f(a) - \lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ ist ein lineares Funktional in $A(r, c)$ mit $h(e^{(n)}) = 0$ für $n = 0, 1, \ldots$. Daraus schließt man ebenso wie bei Satz 3.4, daß $h(a)$ im ganzen Raum $A(r, c)$ verschwindet.

Die beiden folgenden Sätze sind Spezialisierungen der Sätze 3.3, 3.4 und 3.5 für normale Matrizen.

Satz 3.6. Voraussetzung. *A sei eine normale Matrix.*

Behauptung. *Damit die ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ $(A, B)_f$- bzw. $(A, B)_r$-Summierbarkeitsfaktoren sind, ist notwendig, daß es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß*

für $A(f, c)$: (F_1) $\qquad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$

für $A(r, c)$: (F_2) $\qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$

ist.

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes 3.3 sind hier wegen Satz 2.5 erfüllt. Nach Satz 2.4 sind alle linearen Funktionale im Raume $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ bekannt. Es ist $A_n(e^{(\nu)}) = a_{n\nu}$. Wenn die Matrix A FF-permanent ist, strebt $A_n(e^{(\nu)})$ gegen Null für $n \to \infty$ und jedes feste $\nu = 0, 1, \ldots$. Wenn A dagegen RF-permanent ist, strebt $A_n(e^{(\nu)})$ gegen 1 für $n \to \infty$ und jedes feste $\nu = 0, 1, \ldots$. Damit folgen aus (F) von Satz 3.3 die Bedingungen (F_1) und (F_2) unmittelbar.

Satz 3.7. Voraussetzung. *Die FF-permanente Matrix A sei normal und perfekt. Die ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ seien $(A, B)_f$-Summierbarkeitsfaktoren, so daß es nach Satz 3.6 eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, für die $\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu}$ ist.*

Behauptung. *Für alle* $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ *ist*

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a).$$

Beweis. Wir wenden Satz 3.4 an. Mit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a)$ ist $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \ldots$. Ferner ist

$$f(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \text{ [19]}.$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$ folgt $\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$. Das Funktional $g(a) = 0$ für alle $a \in A(f, c)$ erfüllt die Bedingungen des Satzes 3.4. Damit folgt $F(a) = f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 3.8. Voraussetzung. *Die RF-permanente Matrix* A *sei normal und perfekt. Die* ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots)$ *seien* $(A, B)_r$*-Summierbarkeitsfaktoren, so daß es nach Satz* 3.6 *eine Folge* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\sum |\alpha_n| < +\infty$ *und eine Zahl* α *gibt, für die* $\varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu}$ *für* $\nu = 0, 1, \ldots$ *ist.*

Behauptung. *Für alle* $a = \{a_\nu\} \in A(r, c)$ *ist*

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu = \alpha \lim_{n \to \infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a).$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.5.

§ 4.

Perfektheit.

Wir wollen in diesem § eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Perfektheit einer Matrix angeben und daraus hinreichende Bedingungen für Perfektheit ableiten.

Lemma 4.1. I. *Die FF-permanente Matrix* A *ist genau dann perfekt, wenn jedes lineare Funktional* $f(a)$ *aus* $A(f, c)$*, für das* $f(e^{(n)}) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *und* $f(e) = 0$ *gilt, im ganzen Raum* $A(f, c)$ *verschwindet.*

II. *Die RF-permanente Matrix* A *ist genau dann perfekt, wenn jedes lineare Funktional* $f(a)$ *aus* $A(r, c)$*, für das* $f(e^{(n)}) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *gilt, im ganzen Raum* $A(r, c)$ *verschwindet.*

Beweis. Banach, Kap. 4, Satz 7, S. 58.

Die beiden folgenden Sätze 4.2 und 4.3 sind Spezialfälle dieses Lemmas.

---

[19] Die Vertauschung der Summation ist wegen $\overline{\lim_n} \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| < +\infty$ erlaubt.

Satz 4.2. Voraussetzung. *A sei eine FF-permanente, normale Matrix.*

Behauptung. *A ist genau dann perfekt, wenn die Bedingungen*

$$\sum |a_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n a_{n\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

stets $\alpha_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ nach sich ziehen.

Beweis. Wir wenden das Lemma 4.1 auf den hier vorliegenden Spezialfall an. In $A(f, c)$ sind alle linearen Funktionale nach Satz 2.4 bekannt. Nach Lemma 4.1 ist A genau dann perfekt, wenn aus

$$\sum |\alpha_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} = 0, \ \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

folgt, daß $\alpha = 0$ und $\alpha_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ist. Diese Bedingung ist aber mit der in der Behauptung angegebenen gleichwertig, denn aus $\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ folgt wegen $\alpha = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu}$, daß $\alpha = 0$ ist.

Satz 4.2 wurde (in etwas anderem Zusammenhang) von S. Mazur [17], S. 48—50, bewiesen. Mazur beweist dort mit Hilfe dieses Satzes die Perfektheit der zu den Cesàroschen- und zum Eulerschen Verfahren gehörigen FF-permanenten Matrizen.

Satz 4.3. Voraussetzung. *A sei eine RF-permanente, normale Matrix.*

Behauptung. *A ist genau dann perfekt, wenn die Bedingungen*

$$\sum |\alpha_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

stets $\alpha_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ nach sich ziehen.

Beweis. Aus Lemma 4.1 folgt wie beim Beweis von Satz 4.2, daß A genau dann perfekt ist, wenn aus

$$\sum |\alpha_n| < +\infty \quad \text{und} \quad (*) \quad \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0$$

für $\nu = 0, 1, \ldots$ folgt, daß $\alpha = 0$ und $\alpha_n = 0$ für $n = 0, 1, \ldots$ ist. Aus (*) folgt, da wegen der RF-Permanenz von A eine Zahl M mit $|a_{n\nu}| \leqq M$ existiert, daß $|\alpha| \leqq M \sum_{n=\nu}^{\infty} |\alpha_n| = o(1)$, also $\alpha = 0$ ist. Damit folgt die angegebene Bedingung.

Satz 4.4. Voraussetzung. *A sei eine FF-permanente, normale Matrix.*

Behauptung. *A ist sicher perfekt, wenn die zu A inverse Matrix $\bar{A} = (\bar{a}_{n\nu})$ beschränkte Spalten besitzt.*

Beweis. Wir wenden Satz 4.2 an. Es sei also $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und $\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0$ für $\nu = 0, 1, \ldots$. Dann ist

$$0 = \sum_{\nu=m}^{\infty} \bar{a}_{\nu m} \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n \sum_{\nu=m}^{n} a_{n\nu} \bar{a}_{\nu m} = \alpha_m ,$$

da auf Grund der Voraussetzungen für jedes m

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\alpha_n| \sum_{\nu=m}^{n} |a_{n\nu}| \, |\bar{a}_{\nu m}| < +\infty$$

ist.

Satz 4.5. Voraussetzung. *A sei eine RF-permanente, normale Matrix.*

Behauptung. *A ist sicher perfekt, wenn für die zu A inverse Matrix $\bar{A} = (\bar{a}_{n\nu})$ gilt:*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |\bar{a}_{n\nu}| < +\infty \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots .$$

Beweis entsprechend wie bei Satz 4.4.

Mit Hilfe der Sätze 4.4 und 4.5 weist man leicht nach, daß die zum C_k-Verfahren ($k > 0$) gehörenden FF- und RF-permanenten Matrizen perfekt sind. (S. Mazur [17], vgl. auch J. P. Hill [12].)

§ 5.

Abschnittskonvergenz.

Wir werden in diesem § untersuchen, bei welchen FF-permanenten Matrizen die Bedingung (F) aus Satz 3.3 für die Existenz von

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$$

hinreichend ist. $B = (b_{t\nu})$ ist in diesem § eine RF-permanente Matrix, von der wir nicht voraussetzen, daß sie die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 erfüllt.

Definition. *Einen normierten Folgenraum X, in dem für jedes $x \in X$ gilt:*

$$x^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k} x_\nu e^{(\nu)} \to x = \{x_\nu\} \quad \text{für } k \to \infty ,$$

nennen wir einen Raum, in dem Abschnittskonvergenz (AK) vorhanden ist.

Wenn für jedes in X erklärte lineare Funktional $f(x)$ und für jedes $x \in X$ gilt: $f(x^{(k)} - x) \to 0$ für $k \to \infty$, nennen wir X einen Raum, in dem schwache Abschnittskonvergenz (SAK) vorhanden ist.

Bemerkung. Wenn in X AK vorhanden ist, dann ist wegen $|f(x^{(k)} - x)| \leqq \|f\| \, \|x^{(k)} - x\|$ auch SAK in X vorhanden.

Man überzeugt sich leicht, daß im Raum s_n (Nullfolgen) AK und damit SAK, im Raum s_c dagegen keine SAK vorhanden ist.

Satz 5. 1. Voraussetzung. *Die Matrix A sei FF-permanent und in $A(f, c)$ sei gliedweise Konvergenz, in $A(f, n)$ SAK vorhanden.*

Behauptung. $\lim\limits_{t \to t_0} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ *existiert genau dann für alle* $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$, *wenn es in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ gibt, so daß*

$$\text{(F):} \qquad \varepsilon_n = f(e^{(n)}) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

ist.

Beweis. Die Bedingung (F) ist nach Satz 3. 3 notwendig. Es sei nun $a = \{a_\nu\} \in A(f, n)$. Dann folgt aus (F), daß

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu f(e^{(\nu)}) = f\Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{(\nu)}\Big) \to f(a),$$

weil im Raum $A(f, n)$ SAK vorhanden ist. $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert also für alle $\{a_\nu\} \in A(f, n)$. Da $A(f, n)$ alle Nullfolgen enthält, konvergiert $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} n_\nu \varepsilon_\nu$ für jede Nullfolge $\{n_\nu\}$. Also muß $\sum |\varepsilon_\nu| < +\infty$ sein. Daraus folgt aber, daß $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ konvergiert. Natürlich ist dann $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ auch B-summierbar (Vgl. den Zusatz zu Satz 3. 3.).

Wir wollen nun feststellen, wie eine normale, FF-permanente Matrix A beschaffen sein muß, damit in $A(f, n)$ SAK vorhanden ist.

Satz 5. 2. Voraussetzung. *Die Matrix A sei FF-permanent und normal.*

Behauptung. *In $A(f, n)$ ist genau dann SAK vorhanden, wenn es ein für alle $a \in A(f, n)$ erklärtes Funktional $M(a)$ mit $0 \leqq M(a) < +\infty$ gibt, so daß für alle n und k $(n > k)$*

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} a_\nu\Big| \leqq M(a) \quad (a = \{a_\nu\} \in A(f, n))$$

ist[20]).

Beweis. In $A(f, n)$ ist $f(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_\nu A_n(a)$ mit $\sum |\alpha_n| < \infty$ ein lineares Funktional und jedes lineare Funktional in $A(f, n)$ kann so dargestellt werden (Vgl. den Zusatz zu Satz 2. 4.). In $A(f, n)$ ist also genau dann SAK vorhanden, wenn für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, n)$ gilt, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a^{(k)} - a) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty,$$

wie auch $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gewählt sei.

[20]) Vgl. auch K. Zeller [21].

Für jedes feste k ist $\{A_n(a^{(k)} - a)\}$ eine Folge aus s_n. Also ist in $A(f, n)$ genau dann SAK vorhanden, wenn die Folgen $\{A_n(a^{(k)} - a)\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ in s_n schwach gegen Null, oder wenn die Folgen $\{A_n(a^{(k)})\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ für $k \to \infty$ schwach gegen $\{A_n(a)\}$ streben.

Bei Banach, Kap. 9, S. 136, sind die genauen Bedingungen für schwache Konvergenz in s_c angegeben. Eine kleine Abänderung des dortigen Beweises lehrt, daß für $x^{(n)} = \{\xi_i^{(n)}\} \in s_n$ und $x = \{\xi_i\} \in s_n$ genau dann $x^{(n)}$ in s_n schwach gegen x strebt, wenn

$$1^0 \quad \|x^{(n)}\| \leqq M \qquad \text{und} \qquad 2^0 \quad \lim_{n \to \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

gilt. Für die Folgen $\{A_n(a^{(k)})\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ bedeutet dies:

$$1^0 \quad \|A_n(a^{(k)})\| = \overline{\operatorname{fin}}_n \left| \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} a_\nu \right| \leqq M \qquad (a_{n\nu} = 0 \text{ für } \nu > n),$$

$$2^0 \quad \lim_{k \to \infty} A_n(a^{(k)}) = A_n(a).$$

1^0 ist aber gleichbedeutend mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n>k} \left| \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} a_\nu \right| \leqq M$, da $\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} a_\nu \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. 2^0 ist von selbst erfüllt.

Zusatz. In Satz 5.2 kann man stets für $M(a)$ das Funktional $K\|a\|$ (mit passendem $K \geqq 0$) einsetzen. $\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} a_\nu$ ist doch nach Lemma 3.2 für jedes Zahlenpaar n, k ein lineares Funktional $f_{n,k}(a)$ in $A(f, n)$. Aus $|f_{n,k}(a)| \leqq M(a)$ folgt aber, daß es eine Zahl $K \geqq 0$ mit $\|f_{n,k}\| \leqq K$ für alle n und k gibt (Banach, Kap. 5, Satz 5, S. 80.). Dann ist also $|f_{n,k}(a)| \leqq K\|a\| = K \overline{\operatorname{fin}}_n \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} a_\nu \right|$.

Für normale FF-permanente Matrizen folgt aus Satz 5.1 der

Satz 5.3. Voraussetzung. *Die Matrix A sei FF-permanent und normal. In $A(f, n)$ sei SAK vorhanden.*

Behauptung. $\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ *existiert genau dann für alle* $a \in A(f, c)$, *wenn es eine Folge* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\sum |\alpha_n| < +\infty$ *gibt, so daß*

$$(F_1): \qquad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

ist.

Beweis. Die Voraussetzungen von Satz 5.1 sind wegen Satz 2.5 erfüllt. Die Bedingung (F_1) folgt aus (F) von Satz 5.1 ebenso wie (F_1) von Satz 3.6 aus (F) von Satz 3.3.

Satz 5.4. Voraussetzung. *Die Matrix A sei FF-permanent. In $A(f, n)$ sei SAK vorhanden.*

Behauptung. *A ist perfekt.*

Beweis. Es sei $a \in A(f, c)$ und $\lim_{t \to t_0} A_t(a) = \xi$. Die Folge

$$\xi e + \sum_{n=0}^{k} (a_n - \xi) e^{(n)}$$

strebt schwach gegen a, da in $A(f, n)$ SAK vorhanden ist. Daraus folgt die Behauptung nach Banach, Kap. 9, Satz 2, S. 134.

Bei RF-permanenten Matrizen A ist die Bedingung (F) aus Satz 3.3 i. a. für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ nicht hinreichend. Es gilt der

Satz 5.5. Voraussetzung. *Die Matrix A sei RF-permanent und nicht konvergenzgleich.*

Behauptung. *Es gibt in $A(r, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ $(n = 0, 1, \ldots)$ nicht für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$ konvergiert.*

Beweis. $f(a) = \lim_{t \to t_0} A_t(a)$ ist ein lineares Funktional in $A(r, c)$ mit $f(e^{(n)}) = 1$ für $n = 0, 1, \ldots$; $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergiert aber nicht für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$, da A nicht konvergenzgleich ist.

Um notwendige und hinreichende Bedingungen für $(A, C)_r$-Konvergenzfaktoren zu erhalten, müssen wir also zusätzlich zu (F) noch weitere notwendige Bedingungen einführen.

Zuvor sei noch angemerkt: Wenn $A = (a_{n\nu})$ eine normale, RF-permanente Matrix ist, dann ist $\hat{A} = (\hat{a}_{n\nu})$ mit $\hat{a}_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n\nu+1}$ $(a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n)$ eine normale, FF-permanente Matrix.

Satz 5.6. Voraussetzung. *A sei eine normale, RF-permanente Matrix. In $\hat{A}(f, n)$ sei SAK vorhanden.*

Behauptung. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ *konvergiert genau dann für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß*

$$(F_2): \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

ist, und wenn

$$(G_1): \qquad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Big)$$

für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$ existiert.

Beweis. Die Bedingung (F_1) ist nach Satz 3.6 für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ notwendig. Mit $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ ist nun

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varepsilon_\nu = s_n \varepsilon_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta \varepsilon_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Es ist $\Delta \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n \hat{a}_{n\nu}$. Ferner ist $\{s_\nu\} \in \hat{A}(f, c)$ und in $\hat{A}(f, n)$ ist SAK vorhanden. Nach Satz 5.3 konvergiert II für $n \to \infty$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert also genau dann für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$, wenn I für $n \to \infty$ konvergiert. Daraus folgt aber gerade die Bedingung (G_1).

Zusatz. Wenn für die Folgen $\{s_n\}$ des Wirkfeldes $\hat{A}(f, c)$ eine genaue Größenbeschränkung der Form $o(f(n))$ ($f(n)$ unbeschränkt und monoton wachsend) vorhanden ist, wenn also für alle $\{s_n\} \in \hat{A}(f, c)$ $s_n = o(f(n))$ erfüllt, aber für keine unbeschränkte Folge $\{\lambda_n\}$ $s_n = o\left(\frac{f(n)}{\lambda_n}\right)$ für alle $\{s_n\} \in \hat{A}(f, c)$ richtig ist, so ist die Bedingung (G_1) von Satz 5.6 mit (G): $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ gleichbedeutend. Aus (G) folgt zunächst (G_1) unmittelbar. Wenn (G) nicht erfüllt ist, wenn also $\varepsilon_n = \frac{\mu_n}{f(n)}$ mit unbeschränktem μ_n gilt, dann ist auch (G_1) nicht erfüllt, denn es gibt dann eine Folge $\{s_n\} \in \hat{A}(f, c)$ mit $s_n = \frac{f(n)}{\bar{\mu}_n}$, wobei $|\bar{\mu}_n| \leqq \sqrt{|\mu_n|} + 1$ ist, so daß also $|s_n \varepsilon_n| = \left|\frac{\mu_n}{\bar{\mu}_n}\right|$ unbeschränkt ist.

Auf diese Weise kann man ganz allgemein eine notwendige Konvergenzbedingung — wir nennen sie *Größenordnungsbedingung* — erhalten. Wenn in $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ eine genaue Größenbeschränkung der Form $o(f(n))$ vorhanden ist, so ist zur Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$ die Bedingung (G): $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ notwendig. Aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ folgt nämlich, daß $a_n \varepsilon_n = o(1)$ ist und daraus folgt (G).

Wenn in $B(r, c)$ eine genaue Größenbeschränkung der Form $o(g(n))$ vorhanden ist, dann erkennt man ebenso, daß für die B-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ die Bedingung (G): $\varepsilon_n = O\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right)$ notwendig ist.

§ 6.

Wirkfelder mit schwacher Abschnittskonvergenz.

In diesem § werden wir für einige bekannte Wirkfelder die SAK mit Hilfe des Satzes 5.2 nachweisen.

Satz 6.1. *$C_k(f, n)$ ist für jedes k mit $0 \leqq k \leqq 1$ ein Raum mit SAK*[21]).

[21]) C_k bedeutet hier das Cesàrosche Limitierungsverfahren.

Beweis. Die k-te summatorische Folge einer Folge $a = \{a_\nu\}$ bezeichnen wir mit $\{S_n^k(a)\}$, wobei $S_n^k(a) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\nu+k-1}{n-\nu} a_\nu$ ist. Für jedes k mit $0 \leqq k \leqq 1$ und jedes $m \leqq n$ gilt nun

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} a_\nu \right| \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \mu \leqq m} |S_\mu^k(a)|$$

nach L. S. Bosanquet [8], Lemma 5, S. 484. (Vgl. auch Bosanquet [4]). Daraus folgt nun

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}}{\binom{n+k}{n}} a_\nu \right| \leqq \frac{\binom{m+k}{m}}{\binom{n+k}{n}} \operatorname*{Max}_{0 \leqq \mu \leqq m} \left| \frac{S_\mu^k(a)}{\binom{\mu+k}{\mu}} \right| \leqq \overline{\operatorname{fin}}_{\mu} \left| \frac{S_\mu^k(a)}{\binom{\mu+k}{\mu}} \right| < \infty$$

für alle $\{a_\nu\} \in C_k(f, n)$ und somit nach Satz 5.2 die SAK in $C_k(f, n)$.

Wir werden im folgenden § sehen, daß in $C_k(f, n)$ für $k > 1$ keine SAK vorhanden ist.

$\{p_\nu\}$ $(p_\nu \neq 0,\ \nu = 0, 1, \ldots)$ sei eine Zahlenfolge, für deren summatorische Folge $\{P_n\}$ gilt: $|P_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ und $\sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu| \leqq K |P_n|$. Dann ist die Matrix $P = (p_{n\nu})$ mit

$$p_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{p_\nu}{P_n} & \nu \leqq n \\ 0 & \nu > n \end{cases} \quad \text{FF-permanent.}$$

(Matrixverfahren bewichteter arithmetischer Mittel.)

Satz 6.2. *In $P(f, n)$ ist SAK vorhanden.*

Beweis. Es sei $\sigma_k(a) = \frac{1}{P_k} \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu a_\nu$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen k und n $(k < n)$ die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu a_\nu \right| = \left| \frac{P_k}{P_n} \right| |\sigma_k(a)| \leqq K \frac{\sum_{\nu=0}^{k} |p_\nu|}{\sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu|} |\sigma_k(a)| \leqq K |\sigma_k(a)|.$$

Aus Satz 5.2 folgt dann die Behauptung.

§ 7.

Einige Anwendungen.

$B = (b_{t\nu})$ bedeutet in diesem § eine RF-permanente Matrix, von der wir nicht voraussetzen, daß sie die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 erfüllt.

Definition. *$\{x_n\}$ sei eine Zahlenfolge und k sei eine reelle Zahl. Wenn $\sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} x_n$ konvergiert, so wird im folgenden für diese Summe das Symbol $A^k x_\nu$ verwendet.*

Lemma 7.1. *Wenn* $\varepsilon_n = O(1)$ *ist, so existieren* $\Delta^{\alpha+\beta}\varepsilon_n$ *und* $\Delta^{\beta}(\Delta^{\alpha}\varepsilon_n)$ *für alle Zahlen* $\alpha > 0$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > 0$ *und sind einander gleich.*

Beweis. A. F. Andersen [1], [2] und L. S. Bosanquet [5].

Lemma 7.2. *Wenn* $\varepsilon_n = o(1)$ *ist, so existieren* $\Delta^{\alpha+\beta}\varepsilon_n$ *und* $\Delta^{\beta}(\Delta^{\alpha}\varepsilon_n)$ *für alle Zahlen* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq -1$, $\alpha + \beta \geqq 0$ *und sind einander gleich.*

Beweis. A. F. Andersen [1], [2] und L. S. Bosanquet [5].

Satz 7.3. *k sei reell und* $0 \leqq k \leqq 1$. $\lim\limits_{t \to t_0} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ *existiert genau dann für alle* $\{a_\nu\} \in C_k(f, c)$, *wenn es eine Folge* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\sum |\alpha_n| < +\infty$ *gibt, so daß*

$$(F_1): \qquad \varepsilon_\nu = \Delta^{-k}\frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

ist.

Beweis. Nach Satz 6.1 ist in $C_k(f, n)$ SAK vorhanden. Die Behauptung folgt aus Satz 5.3.

Satz 7.4. *Die Bedingung* (F_1) *aus Satz* 7.3 *ist gleichbedeutend mit den Bedingungen*

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\Delta^k \varepsilon_n| < +\infty \qquad \textit{und} \qquad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \textit{ konvergiert}^{22}).$$

Beweis. Für $k = 0$ ist die Behauptung selbstverständlich. Nun sei $k > 0$. Aus (1) folgt, daß für die durch $\alpha_n = \binom{n+k}{n} \Delta^k \varepsilon_n$ erklärte Folge $\{\alpha_n\}$ die Bedingung $\sum |\alpha_n| < +\infty$ erfüllt ist. Nach Lemma 7.2 folgt daraus $\Delta^{-k}\frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} = \Delta^{-k}(\Delta^k \varepsilon_n) = \varepsilon_n$, da wegen (2) $\varepsilon_n = o(1)$ ist.

Umgekehrt folgt aus (F_1)

$$\sum_{\nu=0}^{r} |\varepsilon_\nu| = \sum_{\nu=0}^{r} \left|\Delta^{-k}\frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}}\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{r} \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \frac{|\alpha_n|}{\binom{n+k}{n}}$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}}{\binom{n+k}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Aus (F_1) folgt also, daß $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n| < +\infty$ ist. Insbesondere ist dann (2) erfüllt. Man bestätigt durch direktes Ausrechnen, daß

$$\Delta^k \varepsilon_\nu = \Delta^k\left(\Delta^{-k}\frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}}\right) = \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}}$$

gilt. Das ist aber gleichbedeutend mit (1).

Zusatz. Nach Satz 7.4 folgen aus (F_1) die Bedingungen

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\Delta^k \varepsilon_n| < +\infty \qquad \text{und} \qquad (2') \quad \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu = O(1).$$

---

[22]) Satz 7.3 wurde mit den Bedingungen (1) und (2) für Konvergenzfaktoren ($B = E$; vgl. S. 29) von G. G. Lorentz [16] bewiesen.

Umgekehrt kann man aus (1) und (2′) ebenfalls wieder (F_1) ableiten. Wir wollen den Beweis hier nur andeuten. Für $k = 0$ ist die Behauptung selbstverständlich. Mit $\alpha_n = \binom{n+k}{n} \Delta^k \varepsilon_n$ ($\sum |\alpha_n| < +\infty$ wegen (1)) folgt $\Delta^{1-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} = \Delta \varepsilon_n$ nach Lemma 7.1, da wegen (2) $\varepsilon_n = O(1)$ ist.

Das Lemma 7.2 können wir hier nicht anwenden, um direkt ε_n zu erhalten, denn aus (2′) folgt nur $\varepsilon_n = O(1)$. Bildet man nun $\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta \varepsilon_\nu$, dann folgt $\varepsilon_n = c + \Delta^{-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}}$ mit $c = \varepsilon_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{1-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}}$. Der Beweis von Satz 7.4 lehrt nun, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \Delta^{-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \right| < +\infty$ ist. Damit folgt aus (2′): $O(1) = \sum_{n=0}^{r} \varepsilon_n = c \cdot r + O(1)$, also $c = 0$.

Wir werden mit Hilfe des folgenden Satzes 7.5 nachweisen, daß in $C_k(f, n)$ für keine Zahl $k > 1$ SAK vorhanden ist.

Satz 7.5. *Es sei $k > 1$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert genau dann für alle $\{a_\nu\} \in C_k(f, c)$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, so daß*

$$(F_1): \qquad \varepsilon_\nu = \Delta^{-k} \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

und

$$(G): \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ist.

Beweis. Die Bedingung (F_1) ist nach Satz 3.6 für die Konvergenz notwendig. Die genaue Größenbeschränkung[23]) der Folgen aus $C_k(f, c)$ ist $o(n^k)$. Daraus folgt, daß (G) ebenfalls notwendig ist. Zusammen sind sie auch hinreichend. Denn ist h eine ganze Zahl mit $k - 1 \leqq h < k$. Durch h-malige partielle Summation findet man, daß

$$\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu \varepsilon_\nu = S_r^1(a)\, \varepsilon_{r+1} + S_r^2(a)\, \Delta \varepsilon_{r+1} \ldots S_r^h(a)\, \Delta^{h-1} \varepsilon_{r+1} + \sum_{\nu=0}^{r} S_\nu^h(a)\, \Delta^h \varepsilon_\nu$$

ist. Wegen (G) ist $S_r^p(a)\, \Delta^{p-1} \varepsilon_{r+1} = o(1)$ für $p = 0, 1, \ldots, h$ und aus (F_1) folgt, daß $\Delta^h \varepsilon_\nu = \Delta^{h-k} \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-h-1}{n-\nu} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}}$ ist.

Wir erhalten damit

$$\sum_{\nu=0}^{r} S_\nu^h(a)\, \Delta^h \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{r} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} S_n^k(a) + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^{r} \binom{n-\nu+k-h-1}{n-\nu} S_\nu^h(a) = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

[23]) Vgl. S. 38.

I strebt für $n \to \infty$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n^k(a)}{\binom{n+k}{n}}$. Aus

$$\left| \sum_{\nu=0}^{r} \binom{n-r+k-h-1}{n-r} S_\nu^h(a) \right| \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \mu \leqq r} |S_\mu^k(a)|$$

(vgl. den Beweis von Satz 6.1) folgt aber $\mathrm{II} = o(1)$ und damit die Behauptung.

Satz 7.6. *Wenn $k > 1$ ist, dann ist in $C_k(f, n)$ keine SAK vorhanden.*

Beweis. Wenn für eine Zahl $k_0 > 1$ in $C_{k_0}(f, n)$ SAK vorhanden wäre, so würde $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in C_{k_0}(f, c)$ konvergieren, wenn allein die Bedingung (F_1) des Satzes 7.5 erfüllt ist (Satz 5.3). Für keine Zahl $k > 1$ folgt aber aus (F_1) auch (G), m. a. W. es gibt zu jedem $k > 1$ eine Folge $\{\alpha_n(k)\}$, so daß $\Delta^{-k} \frac{\alpha_n(k)}{\binom{n+k}{n}} \neq O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ ist. Zum Beweise wählen wir zu gegebenem $k > 1$ eine nicht ganze Zahl k' mit $1 < k' < k$ und setzen $\alpha_n(k) = \binom{n-k'}{n}$. Dann ist $\sum |\alpha_n(k)| < +\infty$ und für $\nu \geqq 1$ gilt:

$$\Delta^{-k} \frac{\alpha_\nu(k)}{\binom{\nu+k}{\nu}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \frac{\binom{n-k'}{n}}{\binom{n+k}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1 \ldots k)\,(n+\nu-k' \ldots -k'+1)}{n!\,(n+\nu+k \ldots k+1)}$$

$$= \frac{\nu-k' \ldots 1-k'}{\nu+k \ldots 1+k} F(k, 1+\nu-k', 1+\nu+k; 1)^{24})$$

$$= \frac{\binom{\nu-k'}{\nu}}{\binom{\nu+k}{\nu}} \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k')}{\Gamma(k+k')} \neq O\left(\frac{1}{\nu^k}\right), \text{ da } \binom{\nu-k'}{\nu} \sim \frac{1}{\nu^{k'}} \text{ ist.}$$

Bemerkung. Aus den Bedingungen (F_1) und (G) von Satz 7.5 kann man mit Hilfe des Lemmas 7.2 ähnlich wie bei Satz 7.4 die mit (F_1) und (G) gleichwertigen Bedingungen

$$1^0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\Delta^k \varepsilon_n| < +\infty \qquad \text{und} \qquad 2^0 \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ableiten.

Aus dem Satz 5.6 erhält man sofort die genauen Bedingungen für $(C_k, C)_r$-Konvergenzfaktoren, falls $0 \leqq k \leqq 1$ ist. Die genauen Bedingungen für $(C_k, C)_r$-Konvergenzfaktoren für alle $k > 0$ lassen sich mit Hilfe von Satz 7.5 angeben.

---

[24]) $F(a, b, c; z)$ steht als Symbol für die hypergeometrische Reihe. Vgl. etwa: Magnus-Oberhettinger „Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik", 2. Aufl., Berlin 1948, S. 10. Wir benutzen hier die Tatsache, daß für $Re(a + b - c) < 0$: $F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$ ist.

Satz 7.7. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ *konvergiert genau dann für alle* $\{a_\nu\} \in C_k(r, c)$ $(k \geqq 0)$, *wenn es eine Folge* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\sum |\alpha_n| < \infty$ *gibt, so daß*

$$(F_2): \qquad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{\binom{n-\nu+k}{n-\nu}}{\binom{n+k}{n}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

und

$$(G): \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ist.

Beweis. Daß die Bedingung (G) notwendig ist, erkennt man ebenso wie bei Satz 7.5. Die Notwendigkeit der Bedingung (F_2) folgt aus Satz 3.6, dabei ist wegen $\varepsilon_n = o(1)$ (nach (G)) $\alpha = 0$ zu setzen. Wenn man $\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu \varepsilon_\nu$ ebenso wie beim Beweis des Satzes 5.6 durch partielle Summation umformt, dann ist sofort zu ersehen, daß die Bedingungen (F_2) und (G) wegen Satz 7.5 für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ hinreichen.

Zusatz. Aus den Bedingungen (F_2) und (G) des Satzes 7.7 kann man (mit Hilfe des Lemmas 7.2) die damit gleichwertigen Bedingungen

$$1^0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\Delta^{k+1} \varepsilon_n| < +\infty \qquad \text{und} \qquad 2^0 \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ableiten. Mit den Bedingungen 1^0 und 2^0 wurde Satz 7.7 von S. Chapman [9] (hinreichend) und T. Kojima [15] (notwendig) zuerst bewiesen. Der Satz 7.7 ist ein Spezialfall des in der Einleitung genannten Satzes von I. Schur.

In den beiden folgenden Sätzen verstehen wir unter P eine FF-permanente Matrix von der in § 6 erklärten Art.

Satz 7.8. $\lim_{t \to t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ *existiert genau dann für alle* $\{a_\nu\} \in P(f, c)$, *wenn eine der beiden folgenden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:*

I. *Es gibt eine Folge* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\sum |\alpha_n| < +\infty$, *so daß*

$$(F_1): \qquad \varepsilon_\nu = p_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{P_n} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots$$

ist.

II. *Es ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n| \left| \Delta\left(\frac{\varepsilon_n}{p_n}\right) \right| < +\infty \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = o(p_n).$$

Beweis. In $P(f, n)$ ist nach Satz 6.2 SAK vorhanden. Damit folgt die Behauptung mit der unter I aufgeführten Bedingung unmittelbar aus Satz 5.3. Eine ganz einfache Rechnung ergibt die Gleichwertigkeit der unter I und II genannten Bedingungen.

Wenn P eine FF-permanente Matrix der in § 6 erklärten Art ist, dann ist

$$P^* = (p^*_{n\nu}) \text{ mit } p^*_{n\nu} = \begin{cases} \frac{1}{P_n} \sum_{\mu=\nu}^{n} p_\mu & \text{für } \nu \leqq n \\ 0 & \text{für } \nu > n \end{cases}$$

eine RF-permanente, normale Matrix. Für solche Matrizen gilt der

Satz 7.9. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ *konvergiert genau dann für alle* $\{a_\nu\} \in P^*(r, c)$, *wenn es eine Folge* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\sum |\alpha_n| < +\infty$ *gibt, so daß*

$$(F_2): \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{P_n} \sum_{\mu=\nu}^{n} p_\mu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

und

$$(G): \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$$

ist.

Beweis. Wir wenden den Satz 5.6 an. Für $\hat{P}^*$ erhalten wir hier die Matrix P und in $P(f, n)$ ist SAK vorhanden. (G) folgt aus (G_1), denn die genaue Größenbeschränkung der Folgen $\{s_n\}$ aus $P(f, c)$ ist $o\left(\frac{P_n}{p_n}\right)$.

Zusatz. Wenn die Matrix P^* die Bedingung $\left|\frac{P_n}{p_n}\right| \to \infty$ (für $n \to \infty$) erfüllt (P^* ist dann sicherlich nicht konvergenzgleich), dann sind, wie man leicht nachprüft, die Bedingungen (F_2) und (G) aus Satz 7.9 mit den folgenden:

$$1^0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} |P_n| \left| \Delta\left(\frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n}\right)\right| < +\infty \qquad 2^0 \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \qquad 3^0 \quad \frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n} = o(1)$$

gleichwertig. (Vgl. W. Jurkat [13], Satz 1.)

§ 8.

Die Räume $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$.

Die Sätze der §§ 3 und 5 konnten ohne weiteres auf die zum C_k-Verfahren und den Verfahren bewichteter arithmetischer Mittel gehörigen Matrizen angewandt werden. Bei diesen Matrizen war sofort ersichtlich, daß sie die nötigen Voraussetzungen erfüllen. Für Anwendungen auf die zu den Rieszschen Verfahren $(R_{\lambda k})$ gehörigen Matrizen sind einige Vorbereitungen nötig. In diesem § werden wir zeigen:

1. Die beiden zu einem Rieszschen Verfahren gehörigen Matrizen (FF- und RF-permanent) erfüllen die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 aus § 1.

2. $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ sind dann Räume mit gliedweiser Konvergenz.

3. In $R_{\lambda k}(f, n)$ ist für $0 < k \leqq 1$ AK vorhanden.

Schließlich werden wir alle linearen Funktionale in den Räumen $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ angeben.

Die Rieszschen Verfahren sind folgendermaßen erklärt[25]:

$\{\lambda_\nu\}$ sei eine unbeschränkte, monoton im engeren Sinne wachsende Zahlenfolge mit $\lambda_0 \geqq 0$. Genau dann ist $c = \{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c)$ $(k > 0)$, wenn $\frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k}$ $(\omega > 0)$ mit

$$C_\lambda^k(\omega) = \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu = \int_0^\omega (\omega - \tau)^k \, d\, C(\tau), \quad C(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} c_\nu, \quad C(0) = 0$$

für $\omega \to \infty$ konvergiert.

Man bestätigt ohne Mühe, daß $\varphi(\omega) = \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k}$ für alle $\omega > 0$ und, wenn $\varphi(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda_0 > 0 \\ c_0 & \text{für } \lambda_0 = 0 \end{cases}$ festgesetzt wird, auch für $\omega = 0$, stetig ist[26].

Genau dann ist $\{C_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, c)$, wenn für die Folge $\{c_\nu\}$ mit $c_n = C_n - C_{n-1}$ für $n \geqq 1$, $c_0 = C_0$ gilt: $\{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c)$.

Die Räume $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ werden durch diese Zuordnung der $\{c_\nu\}$ zu den $\{C_\nu\}$ eineindeutig aufeinander abgebildet.

Wir wollen den Raum $R_{\lambda k}(R_{\lambda k}(r, c))$ mit $C(R)$ bezeichnen[27]. $C(R)$ besteht also aus den stetigen Funktionen $\varphi(\omega)$, die für alle $\omega \geqq 0$ erklärt sind, für $\omega \to \infty$ konvergieren und zu denen es eine Folge $\{c_\nu\}$ gibt, so daß $\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega^k} \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu$ ist.

Es versteht sich von selbst, daß auch $R_{\lambda k}(R_{\lambda k}(f, c)) = C(R)$ ist.

Der Raum $C(R)$ ist ein Unterraum des Raumes C_c aller stetigen, für $\omega \geqq 0$ erklärten und für $\omega \to \infty$ konvergenten Funktionen. Wenn man die Gleichheit zweier Funktionen $\psi(\omega)$ und $\bar{\psi}(\omega)$ aus C_c durch $\psi(\omega) = \bar{\psi}(\omega)$ für alle $\omega \geqq 0$ erklärt, ferner die Addition zweier Funktionen und die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl in natürlicher Weise erklärt, dann ist C_c ein Vektorraum. Definiert man außerdem für jede Funktion $\psi \in C_c$ eine Norm durch $\|\psi\| = \overline{\operatorname{fin}}_{\omega \geqq 0} |\psi(\omega)|$, dann ist C_c sogar ein Banach-Raum. Daß nämlich der $\overline{\operatorname{fin}}_{\omega \geqq 0} |\psi(\omega)|$ alle von einer Norm geforderten Eigenschaften besitzt, ist selbstverständlich. Wenn $\psi_p \in C_c$ $(p = 0, 1, \ldots)$ ist und wenn

$$\|\psi_p - \psi_q\| = \overline{\operatorname{fin}}_{\omega \geqq 0} |\psi_p(\omega) - \psi_q(\omega)| \to 0 \quad \text{für } p, q \to \infty,$$

[25] Vgl. Hardy-Riesz [11], Kap. IV.

[26] Bei $\omega = 0$ Stetigkeit von rechts.

[27] $C(R)$ hängt also von λ und k ab. Unter $C(R)$ wird im folgenden immer der zu einer bestimmten (aus dem Zusammenhang hervorgehenden) Matrix gehörige Bildraum verstanden.

dann gibt es eine Funktion $\psi \in C_c$, so daß $\|\psi_p - \psi\| \to 0$. C_c ist also vollständig und damit ein BANACH-Raum.

1. $C(R)$ ist ein Unterraum des Raumes C_c und mit der in C_c erklärten Addition und Multiplikation mit Zahlen ein Vektorraum. Die Bedingung B_1 ist also für $C(R)$ erfüllt.

Um B_2 nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß aus $\sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu = 0$ für alle $\omega \geqq 0$ folgt, daß $c_\nu = 0$ für $\nu = 0, 1, \ldots$ ist.

Setzt man nun der Reihe nach für ω die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ein, so zeigt es sich, daß die c_ν alle verschwinden müssen. Wir bezeichnen den eineindeutigen Operator, der $R_{\lambda k}(r, c)$ auf $C(R)$ abbildet, mit $R(c)$ $(c \in R_{\lambda k}(r, c))$.

Mit der in C_c erklärten Norm ist $C(R)$ ein normierter Vektorraum. (Diese Norm ist von der in B_3 geforderten Art.) Der Raum $C(R)$ ist ein BANACH-Raum, wenn wir seine Abgeschlossenheit nachweisen können [28]).

Satz 8. 1. *Der Raum $C(R)$ ist mit der Norm aus C_c abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\varphi_n(\omega) \in C(R)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\varphi \in C_c$ und $\|\varphi_n - \varphi\|_{C_c} \to 0$ für $n \to \infty$, d. h. (*) $\overline{\text{fin}}_{\omega \geqq 0} |\varphi_n(\omega) - \varphi(\omega)| \to 0$. Nachzuweisen ist, daß es zu $\varphi(\omega)$ eine Folge $\{c_\nu\}$ mit $\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega^k} \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu$ gibt.

Das ist nun leicht einzusehen, wenn man (*) nur für die Intervalle $0 \leqq \omega \leqq \lambda_0$, $\lambda_0 < \omega \leqq \lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho < \omega \leqq \lambda_{\varrho+1}, \ldots$ anschreibt.

Wenn $\lambda_0 > 0$ ist, so ist $\varphi_n(\omega) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ in $0 \leqq \omega \leqq \lambda_0$, also auch $\varphi(\omega) = 0$. In $\lambda_0 < \omega \leqq \lambda_1$ gilt gleichmäßig

$$\left| \frac{(\omega - \lambda_0)^k}{\omega^k} c_0^{(n)} - \varphi(\omega) \right| \to 0 \quad (\varphi_n(\omega) = R(\{c_\nu^{(n)}\}))$$

für $n \to \infty$ und daraus folgt, daß $c_0^{(n)} \to c_0$ für $n \to \infty$ und $\varphi(\omega) = \frac{(\omega - \lambda_0)^k}{\omega^k} c_0$ $(\lambda_0 < \omega \leqq \lambda_1)$ ist. Nun führt man dieselbe Überlegung für das Intervall $\lambda_1 < \omega \leqq \lambda_2$ durch; dabei wird die Konvergenz von $c_0^{(n)}$ verwendet. In dieser Weise fährt man fort und beweist so die Behauptung.

Mit $\|\{c_\nu\}\| = \overline{\text{fin}}_{\omega \geqq 0} \left| \frac{C_\lambda^*(\omega)}{\omega^k} \right|$ $(\{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c))$ ist also $R_{\lambda k}(r, c)$ ein BANACH-Raum. Wenn man für jedes $\{C_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, c)$ eine Norm $\|\{C_\nu\}\|$ durch $\|\{C_\nu\}\| = \|\{c_\nu\}\|$ mit $c_n = C_n - C_{n-1}$ $n \geqq 1$, $c_0 = C_0$ erklärt, dann ist (vgl. Lemma 2. 1) auch $R_{\lambda k}(f, c)$ ein BANACH-Raum.

2. Es sei $c^{(n)} = \{c_\nu^{(n)}\} \in R_{\lambda k}(r, c)$ mit $\|c^{(n)}\| \to 0$ für $n \to \infty$. Mit $\varphi_n(\omega) = R(c^{(n)})$ gilt dann $\|c^{(n)}\| = \overline{\text{fin}}_{\omega \geqq 0} |\varphi_n(\omega)| \to 0$, d. h. $\varphi_n(\omega) \to \varphi(\omega) \equiv 0$. Zu $\varphi(\omega)$ gehört aber die Folge $\{c_\nu\}$ mit $c_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Also strebt $c_\nu^{(n)} \to 0$ für $n \to \infty$ und jedes feste $\nu = 0, 1, \ldots$.

[28]) Denn C_c ist vollständig; jede Fundamentalfolge besitzt also einen Grenzwert in C_c.

Die gliedweise Konvergenz in $R_{\lambda k}(f, c)$ folgt aus der gliedweisen Konvergenz in $R_{\lambda k}(r, c)$ unmittelbar.

3. Satz 8.2. *In $R_{\lambda k}(f, n)$ ist für $0 < k \leqq 1$ AK vorhanden.*

Beweis. Es sei $\{C_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, n)$, d. h. es gilt $\frac{1}{\omega^k}\int_0^\omega (\omega-\tau)^k\, dC(\tau) \to 0$ für $\omega \to \infty$, wobei $C(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} c_\nu$ mit $c_n = C_n - C_{n-1}$ für $n \geqq 1$ und $c_0 = C_0$ ist. Ferner ist $\|\{C_\nu\}\| = \overline{\operatorname{fin}}_{\omega \geqq 0} \left| \frac{1}{\omega^k}\int_0^\omega (\omega-\tau)^k\, dC(\tau)\right|$. Nachzuweisen ist, daß $\|\{0, 0, \ldots, 0, C_m, C_{m+1}, \ldots\}\| \to 0$ für $m \to \infty$. Es ist

$$\|\{0, 0, \ldots, 0, C_m, C_{m+1}, \ldots\}\| = \overline{\operatorname{fin}}_{\omega \geqq 0} \left| \frac{1}{\omega^k}\int_0^\omega (\omega-\tau)^k\, d\hat{C}(\tau)\right|;$$

dabei ist $\hat{C}(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} \hat{c}_\nu$ mit

$$\hat{c}_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < m \\ C_m & \text{für } \nu = m \\ C_\nu - C_{\nu-1} & \text{für } \nu > m \end{cases} \quad \text{d. h. } \hat{C}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \tau \leqq \lambda_m \\ C(\tau) & \text{für } \lambda_m < \tau < \infty. \end{cases}$$

Damit gilt

$$\int_0^\omega (\omega-\tau)^k\, d\hat{C}(\tau) = k\int_0^\omega (\omega-\tau)^{k-1}\hat{C}(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq \omega \leqq \lambda_m \\ k\int_{\lambda_m}^\omega (\omega-\tau)^{k-1} C(\tau)\, d\tau \text{ für } \omega \geqq \lambda_m. \end{cases}$$

Für $\omega \geqq \lambda_m$ ist also $\int_0^\omega (\omega-\tau)^k\, d\hat{C}(\tau) = C_\lambda^k(\omega) - k\int_0^{\lambda_m} (\omega-\tau)^{k-1} C(\tau)\, d\tau$.

Somit ist

$$\|\{0, 0, \ldots, 0, C_m, C_{m+1}, \ldots\}\| \leqq \overline{\operatorname{fin}}_{\omega \geqq \lambda_m} \left| \frac{k}{\omega^k}\int_0^{\lambda_m} (\omega-\tau)^{k-1} C(\tau)\, d\tau \right| + \overline{\operatorname{fin}}_{\omega \geqq \lambda_m} \left| \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k}\right| = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Offensichtlich ist $\mathrm{II} = o(1)$ $(m \to \infty)$. Nach dem Mittelwertsatz von M. Riesz [29] ist nun für jedes k mit $0 < k \leqq 1$

$$\left| k\int_0^{\lambda_m} (\omega-\tau)^{k-1} C(\tau)\, d\tau\right| \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \eta \leqq \lambda_m} |C_\lambda^k(\eta)|.$$

Daraus folgt dann aber, daß $\mathrm{I} \to 0$ für $m \to \infty$, also die AK.

Wir wollen nun alle linearen Funktionale in den Räumen $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ angeben. Wenn man in $C(R)$ alle linearen Funktionale

[29] Vgl. Hardy-Riesz [11], Kap. V, Lemma 7 und M. Riesz [19].

kennt, dann kann man nach Lemma 2.3 alle linearen Funktionale in $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ angeben. In $C(R)$ kann man nun alle linearen Funktionale angeben, wenn man in C_c alle linearen Funktionale kennt. Jedes lineare Funktional in C_c ist nämlich auch ein lineares Funktional in $C(R)$. Wenn umgekehrt in $C(R)$ ein lineares Funktional gegeben ist, dann kann es nach dem Satz von H. Hahn über die Fortsetzung linearer Funktionale (Banach, Kap. 4, Satz 2, S. 55. Vgl. auch H. Hahn [10], Satz III, S. 217) auf C_c fortgesetzt werden. Die Menge F aller linearen Funktionale in C_c besteht also genau aus allen linearen Funktionalen in $C(R)$. Für unsere Zwecke ist die Tatsache, daß es in F mehrere Funktionale geben kann, die auf $C(R)$ genau dieselben Werte annehmen, unwesentlich.

In C_c ist nun $f(x) = \alpha \lim\limits_{t \to \infty} x(t) + \int\limits_0^\infty x(t)\, d\, g(t)$[30]) mit beliebigem α und $\int\limits_0^\infty |d\, g(t)| < +\infty$ $(x = x(t) \in C_c)$ ein lineares Funktional und jedes lineare Funktional in C_c kann so dargestellt werden. (Der Beweis verläuft ähnlich wie der bei Banach, Kap. 4, S. 59–61 für die Tatsache, daß im Raum der in $\langle 0,1 \rangle$ stetigen Funktionen durch

$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\, d\, g(t) \text{ mit } \int\limits_0^1 |d\, g(t)| < +\infty$$

ein lineares Funktional dargestellt wird und daß jedes lineare Funktional in diesem Raum so dargestellt werden kann.)

Damit ist nun

$$f(\{c_\nu\}) = \alpha \lim_{\omega \to \infty} \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} + \int\limits_0^\infty \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k}\, d\, g(\omega), \quad \{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c)$$

mit $\int\limits_0^\infty |d\, g(\omega)| < +\infty$ ein lineares Funktional in $R_{\lambda k}(r, c)$, und jedes lineare Funktional in $R_{\lambda k}(r, c)$ kann so dargestellt werden (Vgl. Lemma 2.3.).

Daraus folgt nach Lemma 2.3 unmittelbar, daß in $R_{\lambda k}(f, c)$ durch

$$f(\{C_\nu\}) = \alpha \lim_{\omega \to \infty} \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} + \int\limits_0^\infty \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k}\, d\, g(\omega), \quad \int\limits_0^\infty |d\, g(\omega)| < +\infty$$

mit $C_\lambda^k(\omega) = \sum\limits_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu$, wo $c_n = C_n - C_{n-1}$ für $n \geqq 1$, $c_0 = C_0$ und $\{C_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, c)$ ist, ein lineares Funktional dargestellt wird, und daß jedes lineare Funktional in $R_{\lambda k}(f, c)$ so dargestellt werden kann.

---

[30]) $\int\limits_0^\infty x(t)\, d\, g(t)$ ist als $\lim\limits_{z \to \infty} \int\limits_0^z x(t)\, d\, g(t)$ aufzufassen.

§ 9.

Anwendungen.

Wir wollen in diesem § die Sätze des § 5 auf die Räume $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ anwenden. $B = (b_{tv})$ sei wieder eine RF-permanente Matrix, von der wir nicht verlangen, daß sie die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 erfüllt.

Satz 9. 1. *$R_{\lambda k}$ sei ein Rieszsches Verfahren und $0 < k \leqq 1$. Dann existiert* $\lim\limits_{t \to t_0} \sum\limits_{v=0}^{\infty} b_{tv} C_v \varepsilon_v$ *genau dann für alle $\{C_v\} \in R_{\lambda k}(f, c)$, wenn es eine für $\omega \geqq 0$ erklärte Funktion $g(\omega)$ mit $\int\limits_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$ gibt, so daß*

$$(\mathrm{F}): \quad \varepsilon_v = \int\limits_{\lambda_v}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_v)^k}{\omega^k} dg(\omega) - \int\limits_{\lambda_{v+1}}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_{v+1})^k}{\omega^k} dg(\omega) \text{ für } v = 0, 1 \ldots$$

ist.

Beweis. Wir wenden den Satz 5. 1 an. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind nach § 8 erfüllt. (In $R_{\lambda k}(f, n)$ ist für $0 < k \leqq 1$ AK, also auch SAK vorhanden.) Auf S. 48 ist das allgemeine lineare Funktional in $R_{\lambda k}(f, c)$ angegeben. Setzt man dort für $\{C_v\}$ die Folge $e^{(v)}$ ein, dann folgt gerade die Bedingung (F).

Zusatz. Die Funktion $g(\omega) = \frac{-\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(k+1)} \frac{1}{\alpha\,\omega^{\alpha}}$ mit $\alpha > 0$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 9. 1. Man erhält damit aus (F) die Faktoren $\varepsilon_v = \frac{1}{\lambda_v^{\alpha}} - \frac{1}{\lambda_{v+1}^{\alpha}}$ für jedes $\alpha > 0$.

Satz 9. 2. *$R_{\lambda k}$ sei ein Rieszsches Verfahren mit $0 < k \leqq 1$. Dann existiert* $\lim\limits_{t \to t_0} \sum\limits_{v=0}^{\infty} b_{tv} c_v \varepsilon_v$ *genau dann für alle $\{c_v\} \in R_{\lambda k}(r, c)$, wenn es eine für $\omega \geqq 0$ erklärte Funktion $g(\omega)$ mit $\int\limits_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß*

$$(\mathrm{F}): \quad \varepsilon_v = \alpha + \int\limits_{\lambda_v}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_v)^k}{\omega^k} dg(\omega) \qquad (v = 0, 1, \ldots)$$

und

$$(\mathrm{G}): \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n^k}\right) \text{ mit } \Lambda_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

ist.

Beweis. Nach Satz 3. 3 ist die Bedingung (F) notwendig; man hat nur in die Bedingung (F) von Satz 3. 3 die linearen Funktionale in $R_{\lambda k}(r, c)$ (S. 48) einzusetzen. Nun schließt man genau so wie bei Satz 5. 6. Es ist $\sum\limits_{v=0}^{n} c_v \varepsilon_v = C_n \varepsilon_n + \sum\limits_{v=0}^{n-1} C_v \Delta \varepsilon_v = \mathrm{I} + \mathrm{II}$. II konvergiert nach Satz 9. 1. Die genaue Größenbeschränkung der Folgen

$\{C_\nu\}$ aus $R_{lk}(f, c)$ ist nach W. Jurkat [13], Satz 5, aber gerade $o(A_n^k)$. Daraus folgt dann, daß (G) mit (F) zusammen notwendig und hinreichend ist.

Wenn es sich darum handelt, festzustellen, ob eine gegebene Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ die Bedingung (F) des Satzes 9.2 erfüllt, dann kann die folgende Bemerkung von Nutzen sein.

k-malige Integration (k nicht notwendig ganz) einer Funktion $f(t)$ kann durch $\int_0^{(k)x} f(t)\,dt = \frac{-1}{\Gamma(k)} \int_x^\infty (x-t)^{k-1} f(t)\,dt$ erklärt werden, wenn $f(t)$ bei $t = \infty$ von genügend hoher Ordnung verschwindet. Ein Integral dieser Bauart tritt gerade in (F) bei Satz 9.2 auf. Erklärt man λ_ν in (F) in passender Weise für alle (nicht ganzzahligen) ν[31]), definiert man ferner nicht ganzzahlige Differentiation durch ganzzahlige Differentiation und nachfolgende passende nicht ganzzahlige Integration, dann kann man (F) formal nach $g(\omega)$ auflösen. Dann bleibt noch übrig nachzusehen, ob für die formal erhaltene Funktion $g(\omega)$ die Bedingungen (F) und $\int_0^\infty |d\,g(\omega)| < +\infty$ erfüllt sind.

Schlußbemerkungen.

Wir haben in den §§ 7 und 9 verschiedene Sätze über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren kennengelernt. Bei allen diesen Sätzen wurde die SAK ausgenützt. Damit ist aber der Anwendungsbereich der Funktionalbedingung keinesfalls erschöpft. In allgemeineren Fällen wird man zur Funktionalbedingung noch weitere notwendige Bedingungen suchen müssen, um schließlich ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen zu erhalten. Am Schluß von § 5 wurde gezeigt, wie man eine notwendige Größenordnungsbedingung (G) finden kann. Zunächst wird man nachsehen, ob die Funktionalbedingung (F) und die Bedingung (G) hinreichend sind. Das ist z. B. bei den RF-permanenten Nörlundschen Matrizen, die von C. N. Moore [18] untersucht worden sind, der Fall.

Die RF-permanenten Nörlundschen Matrizen erhält man folgendermaßen: $\{p_n\}$ sei eine Zahlenfolge mit den folgenden Eigenschaften:

1^0 Für die summatorische Folge $\{P_n\}$ gilt: $P_n \neq 0$ für $n = 0, 1, \ldots$.

2^0 Es gibt eine Zahl K, so daß $\sum_{\nu=0}^{n} |p_\nu| \leqq K\,|P_n|$ für $n = 0, 1, \ldots$ ist.

3^0 $\frac{p_n}{P_n} \to 0$ für $n \to \infty$.

---

[31]) Oft ist λ_ν durch einen Ausdruck erklärt, der auch für nicht ganze ν sinnvoll ist; etwa $\lambda_n = n$, $\lambda_n = \log(n+1)$ usw.

Dann ist $N = (p_{nv})$ mit $p_{nv} = \begin{cases} \frac{P_{n-v}}{P_n} & \text{für } v \leqq n \\ 0 & \text{für } v > n \end{cases}$

eine RF-permanente Matrix. Zu jeder dieser Matrizen N erhält man die inverse Matrix $\overline{N} = (\overline{p}_{nv})$, indem man die Folge $\{k_n\}$ aus der formalen Identität $\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$ bestimmt und

$$\overline{p}_{nv} = \begin{cases} k_{n-v} P_n & \text{für } v \leqq n \\ 0 & \text{für } v > n \end{cases}$$

setzt.

Moore untersucht nur diejenigen dieser Matrizen, für die die Bedingung $\sum_{n=0}^{\infty} n|k_n| < +\infty$ erfüllt ist, und findet den folgenden Satz: $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \varepsilon_v$ konvergiert genau dann für alle $\{a_v\} \in N(r, c)$, wenn

$$1^0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} |P_n| \; \Big| \sum_{v=0}^{\infty} k_v \varepsilon_{n+v} \Big| < +\infty \quad \text{und} \quad 2^0 \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{P_n}\right)$$

ist.

Wenn man für diese Matrizen die Bedingung (F_2) nach Satz 3.6 und die Größenordnungsbedingung (G) aufstellt, findet man:

$$(F_2) \qquad \varepsilon_v = \alpha + \sum_{n=v}^{\infty} \alpha_n \frac{P_{n-v}}{P_n} \quad (\textstyle\sum |\alpha_n| < +\infty) \quad (v = 0, 1, \ldots)$$

und $$(G) \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{P_n}\right).$$

Wenn wir noch annehmen, daß die Folge $\{P_n\}$ unbeschränkt ist, dann muß α in (F_2) den Wert 0 besitzen (wegen (G)). Aus (F_2) und (G) kann man ohne große Mühe die Bedingungen 1^0 und 2^0 wieder ableiten. (F_2) und (G) sind also notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \varepsilon_v$ für alle $\{a_v\} \in N(r, c)$.

Wir wollen nun eine RF-permanente Matrix betrachten, bei der die Funktional- und Größenordnungsbedingung für Konvergenzfaktoren noch nicht hinreichend sind.

Die Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & . \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & . \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$ ist FF-permanent.

Wir erhalten für sie aus Satz 3.6 die Bedingung

$$(F_1): \quad \varepsilon_n = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2} \quad \text{für} \quad n \geqq 1, \; \varepsilon_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2}.$$

mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$. Die genaue Größenbeschränkung der Folgen $\{a_\nu\}$ aus $A_2(f, c)$ ist $o(n)$. Damit folgt die Größenordnungsbedingung (G) $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Folgt aus diesen Bedingungen die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in A_2(f, c)$?

Es ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varepsilon_\nu = a_0 \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \frac{a_\nu + a_{\nu-1}}{2} + \alpha_{n+1} \frac{a_n}{2}.$$

$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \frac{a_\nu + a_{\nu-1}}{2}$ konvergiert für $n \to \infty$. Aus den Bedingungen (F_1) und (G) folgt aber nicht, daß $\alpha_{n+1} \frac{a_n}{2}$ für alle $\{a_\nu\} \in A_2(f, c)$ konvergiert. Zur Konvergenz wäre nämlich notwendig und hinreichend, daß $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Man kann aber Folgen $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und $\alpha_n \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$ angeben, so daß $\frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Wenn man an Stelle von (G) die Bedingung (H): $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ einführt, dann sind (F_1) und (H) offensichtlich für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in A_2(f, c)$ notwendig und hinreichend.

Bei einer genauen Durchsicht des Beweises zu Satz 3.3 erkennt man, daß die Funktionalbedingung (F) gerade auf perfekte Matrizen zugeschnitten ist. Dort wurde doch verlangt, daß $\lim_{t \to t_0} B_t(a, \varepsilon)$ für die Folgen $a = e^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ mit einem linearen Funktional $f(a)$ übereinstimmt. Die Folgen $e^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ bilden nun in $A(f, n)$ bzw. $A(r, c)$, wenn A perfekt ist, eine Grundmenge. Bei einer nicht perfekten Matrix A wird die in Satz 3.3 angegebene Bedingung (F) zu schwach sein; in diesem Falle muß man, um eine günstige Bedingung zu erhalten, die oben angegebene Übereinstimmung für die (die Folgen $e^{(n)}$ $n = 0, 1, \ldots$ enthaltende) Grundmenge des Wirkfeldes der (nicht perfekten) Matrix A verlangen[32]).

Wir wollen zum Schluß für eine nicht perfekte, FF-permanente Matrix genaue Bedingungen für Konvergenzfaktoren angeben.

Die FF-permanente Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ 2 & -1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 2 & -1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 2 & -1 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

[32]) Wir haben in Satz 3.3 die Übereinstimmung für die Folge e (wenn A FF-permanent ist) nicht gefordert.

ist nicht perfekt. Setzt man nämlich $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ für $n \geqq 1$, $\alpha_0 = -1$, so ist $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und $\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0$ für $\nu = 0, 1, \ldots$. Nach Satz 4. 2 ist dann die Matrix A nicht perfekt.

Durch A werden genau die Folgen $\{b \cdot 2^n + c_n\}$, wobei $\{c_n\} \in s_c$ ist, limitiert. („Einfolgenverfahren", vgl. K. Zeller [21], § 12.) Die Folgen $\{2^n\}$, $e^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und e bilden eine Grundmenge in $A(f, c)$.

Das allgemeine lineare Funktional in $A(f, c)$ ist

$$f(a) = \alpha \lim_{n \to \infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a) \quad \text{mit} \quad \sum |\alpha_n| < +\infty,$$

$a \in A(f, c)$ (Satz 2. 4). Als Funktionalbedingung $(\overline{\mathrm{F}})$ werden wir hier also verlangen, daß $\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varepsilon_\nu = f(a)$ gilt, wenn man für a die Folgen der oben angegebenen Grundmenge einsetzt.

Auf diese Weise erhält man die Bedingung

$$(\overline{\mathrm{F}}):\ \varepsilon_\nu = f(e^{(\nu)})\ (\nu = 0, 1, \ldots),\ \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu = f(e),\ \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \varepsilon_\nu = f(\{2^n\}).$$

Die (notwendige) Bedingung $\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \varepsilon_\nu = f(\{2^n\})$ ist aber bereits hinreichend. Wenn nämlich $a = \{a_n\} \in A(f, c)$ gegeben ist, so gilt, wenn man $a_n = b \cdot 2^n + c_n$ mit $\{c_n\} \in s_c$ setzt:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varepsilon_\nu = b \cdot \sum_{\nu=0}^{n} 2^\nu \cdot \varepsilon_\nu + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varepsilon_\nu \to b \cdot f(\{2^{(n)}\}) + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varepsilon_\nu$$

für $n \to \infty$, denn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert, weil $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ist.

Literaturverzeichnis.

Andersen, A. F.

[1] Studier over Cesàro's summabilitetsmetode. Copenhagen 1921.

[2] Comparison theorems in the theory of Cesàro summability. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 27 (1928), 39—71.

Banach, S.

[3] Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

Bosanquet, L. S.

[4] A mean value theorem. J. Lond. Math. Soc. 16 (1941), 146—148.

[5] Note on the Bohr-Hardy theorem. J. Lond. Math. Soc. 17 (1942), 166—173.

[6] Note on convergence and summability factors. J. Lond. Math. Soc. 20 (1945), 39—48.

[7] Note on convergence and summability factors (II). Proc. Lond. Math. Soc. (2), 50 (1948), 295—304.

[8] Note on convergence and summability factors (III). Proc. Lond. Math. Soc. (2), 50 (1949), 482—496.

CHAPMAN, S.

[9] On non-integral orders of summability of series and integrals. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 9 (1911), 369—409.

HAHN, H.

[10] Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. J. für Math. 157 (1927), 214—229.

HARDY, G. H. and RIESZ, M.

[11] The general theory of Dirichlets series. Cambridge 1915.

HILL, J. P.

[12] On perfect methods of summability. Duke Math. J. 3 (1937), 702—714.

JURKAT, W.

[13] Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln. Math. Zeitschr. 54 (1951), 262—271.

KNOPP, K.

[14] Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. für Math. 187 (1950), 70—74.

KOJIMA, T.

[15] On generalized Toeplitz's theorem on limit. Tôhoku Math. J. 12 (1917), 291—326.

LORENTZ, G. G.

[16] Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind. Math. Zeitschr. 51 (1949), 85—91.

MAZUR, S.

[17] Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren. Stud. math. 2 (1930), 40—50.

MOORE, C. N.

[18] Summable series and convergence factors. Americ. Math. Soc. Coll. Publ. XXII (1938).

RIESZ, M.

[19] Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Litt. ac Sci. Szeged 1 (1923), 114—126.

SCHUR, I.

[20] Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. für Math. 151 (1921), 79—111.

ZELLER, K.

[21] Allgemeine Eigenschaften von Matrixverfahren. Diss. Tübingen 1950.

[22] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Zeitschr. 53 (1951), 463—487.

(Eingegangen am 23. Juni 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 55–70 (1951).

Abschnittskonvergenz in FK-Räumen.

Von

Karl Zeller in Tübingen.

Einleitung.

Wir knüpfen an eine frühere Arbeit des Verfassers [1]) an und erinnern zunächst an einige dort gebrauchte Begriffe.

Der Begriff des (komplexen) *linearen Raumes* wird als bekannt vorausgesetzt. Eine *Quasinorm* $p(\mathfrak{x})$ in einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ ist ein Funktional mit den Eigenschaften

$$0 \leqq p(\mathfrak{x}) < \infty, \quad p(a\mathfrak{x}) = |a|\, p(\mathfrak{x}), \quad p(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq p(\mathfrak{x}) + p(\mathfrak{y})$$
$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{E},\ a \text{ komplex}).$$

Sind in $\mathfrak{E}$ abzählbar viele Quasinormen p_j erklärt, so können wir in $\mathfrak{E}$ einen *Konvergenzbegriff* folgendermaßen festlegen: Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ heißt *konvergent* gegen das *Grenzelement* $\mathfrak{x}$ (Bezeichnung: $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}; p_j]$ u. ä.), wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p_j(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ gilt. Der lineare Raum $\mathfrak{E}$ zusammen mit den p_j und diesem Konvergenzbegriff heißt ein *Q-Raum* $[\mathfrak{E}; p_j]$. Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so schreiben wir statt $[\mathfrak{E}; p_j]$ auch kurz $[\mathfrak{E}]$ oder $\mathfrak{E}$.

Mit Hilfe der Konvergenz erklärt man in $\mathfrak{E}$ Begriffe wie Stetigkeit, Berührpunkt, Konvergenz einer Reihe usw. $[\mathfrak{E}; p_j]$ heißt *vollständig*, wenn jede Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ mit $\lim\limits_{m,n\to\infty} p_j(\mathfrak{x}^{(m)} - \mathfrak{x}^{(n)}) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ („*konzentrierte Folge*") ein Grenzelement besitzt. Ein vollständiger Q-Raum, in dem jede Folge höchstens ein Grenzelement besitzt, heißt ein *F-Raum* (wir beschränken uns also auf „lokalkonvexe" F-Räume).

Ein *linearer Koordinatenraum* ist ein linearer Raum, dessen Elemente Stellen (Zahlenfolgen) $\mathfrak{x} = \{x_k\}$ mit komplexen Koordinaten sind und in dem die Operationen $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$ in natürlicher Weise erklärt sind. Ein F-Raum, dem ein linearer Koordinatenraum zugrunde liegt und in dem aus $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ die Beziehungen $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ folgen („*koordinatenweise Konvergenz*"), heißt ein *FK-Raum*.

---

[1]) K. Zeller, Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. 53, 463–487 (1951); zitiert als AELV. Die Ergebnisse dieser und der vorliegenden Arbeit stammen großenteils aus der Dissertation des Verfassers (Tübingen 1950).

Unter der F-Norm in einem F-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ verstehen wir das Funktional $p(\mathfrak{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j}{1+p_j}$. Verschwinden nur endlich viele der p_j nicht identisch, so ist $\mathfrak{E}$ ein *Banach-Raum* (B-Raum) $[\mathfrak{E}; p^*]$ mit der Norm $p^*(\mathfrak{x}) = \sum p_j$. $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}]$ ist gleichbedeutend mit $p(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}) \to 0$ bzw. $p^*(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}) \to 0$. Die Bezeichnung *„BK-Raum"* wird analog wie „FK-Raum" erklärt.

Wir erklären nun in FK-Räumen die Eigenschaften *„Abschnittsdichte"* (AD), *„funktionale Abschnittskonvergenz"* (FAK), *„schwache Abschnittskonvergenz"* (SAK) und *„Abschnittskonvergenz"* (AK). §§ 1—5 bringen die allgemeine Theorie dieser Begriffe in FK-Räumen. Nicht alle Ergebnisse in diesen Paragraphen sind wesentlich neu, ihre Zusammenstellung erleichtert jedoch die Beweisführung in den §§ 6—9, in denen wir Anwendungen auf Probleme erhalten, die Konvergenzfaktoren (§ 6), iterierte Matrixtransformationen (§ 7), Durchschnitte von Matrixverfahren (§ 8) und Größenordnungsbedingungen (§ 9) betreffen.

Einige Definitionen und Sätze lassen sich übertragen auf andere Raumtypen, z. B. Q-Räume, denen ein linearer Koordinatenraum zugrunde liegt. Wir beschränken uns der Übersicht halber auf FK-Räume.

In der voranstehenden Arbeit hat A. Peyerimhoff[3]) mit Hilfe der SAK in BK-Räumen zahlreiche Sätze über Konvergenzfaktoren bei gewissen Limitierungsverfahren aufgestellt. In § 6 werden wir einige grundlegende Sätze dieser Arbeit in verallgemeinerter Form vom Standpunkt der FK-Räume aus formulieren und beweisen. Weiter verwenden wir in § 4 einige Ergebnisse dieser Arbeit, die besagen, daß gewisse Wirkfelder von Limitierungsverfahren als BK-Räume mit SAK aufgefaßt werden können.

§ 1.

Schwache Konvergenz in F-Räumen.

$[\mathfrak{E}; p_j]$ sei ein F-Raum. Wir sagen, daß $\mathfrak{x}^{(n)}$ in $\mathfrak{E}$ *schwach* gegen $\mathfrak{x}$ *konvergiert* (in Zeichen $\mathfrak{x}^{(n)} \xrightarrow{s} \mathfrak{x}$), wenn für jedes lineare, stetige Funktional f in $\mathfrak{E}$ gilt $f(\mathfrak{x}^{(n)}) \to f(\mathfrak{x})$ $(n \to \infty)$.

Eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ kann nicht gegen zwei verschiedene Elemente schwach konvergieren (folgt aus AELV, Satz 3. 5). Aus $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ („starker Konvergenz") folgt offenbar $\mathfrak{x}^{(n)} \xrightarrow{s} \mathfrak{x}$.

Wir nennen eine Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ *beschränkt* in $\mathfrak{E}$, wenn $p_j(\mathfrak{x}^{(n)}) \leqq M_j$ $(j = 0, 1, \ldots)$ gilt.

Satz 1. 1. *Sei* $\mathfrak{x}^{(n)} \longrightarrow \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}; p_j]$. *Dann gilt:* a) $\mathfrak{x}^{(n)}$ *ist beschränkt.* b) *Es gibt eine Folge* $\mathfrak{y}^{(n)}$ *von endlichen Linearkombinationen der* $\mathfrak{x}^{(n)}$, *die gegen* $\mathfrak{x}$ *konvergiert.*

---

[3]) A. Peyerimhoff, Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr. 55. 23—54 (1951); zitiert als Peyerimhoff.

Beweis. a) Für jedes j bilden die linearen Funktionale mit $|f(\mathfrak{x})| \leqq M p_j(\mathfrak{x})$ einen Banach-Raum, wobei die Norm von f das kleinste M ist, das dieser Ungleichung genügt. Der Beweis verläuft nun weiter wie bei Banach [3]), S. 80, Th. 6.

b) Beweis wie bei Banach, S. 134, Th. 2, unter Verwendung von Satz 3.5 aus AELV.

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ seien F-Räume, Φ bilde $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ ab. Wir nennen Φ *schwach stetig*, wenn aus

$$\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}] \quad \text{folgt} \quad \Phi(\mathfrak{x}^{(n)}) \to \Phi(\mathfrak{x})\,[\mathfrak{G}];$$

fehlkonvergenzfrei, wenn aus

$$\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}],\ \Phi(\mathfrak{x}^{(n)}) \to \mathfrak{y}\,[\mathfrak{G}] \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{y} = \Phi(\mathfrak{x});$$

schwach fehlkonvergenzfrei, wenn aus

$$\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}],\ \Phi(\mathfrak{x}^{(n)}) \to \mathfrak{y}\,[\mathfrak{G}] \quad \text{folgt } \mathfrak{y} = \Phi(\mathfrak{x}).$$

Ist Φ schwach fehlkonvergenzfrei, so auch fehlkonvergenzfrei, weil ja aus starker Konvergenz die schwache folgt.

Satz 1.2. *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ seien F-Räume, Φ eine lineare Operation, die $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ abbildet. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:* a) *Φ ist fehlkonvergenzfrei.* b) *Φ ist stetig.* c) *Φ ist schwach stetig.* d) *Φ ist schwach fehlkonvergenzfrei.*

Beweis. Wir zeigen die logischen Beziehungen a)$\rightsquigarrow$b)$\rightsquigarrow$c)$\rightsquigarrow$d)$\rightsquigarrow$a). a)$\rightsquigarrow$b): Siehe Banach, S. 41, Th. 7. b)$\rightsquigarrow$c): Beweis wie bei Banach, S. 143, Th. 3. c)$\rightsquigarrow$d), d)$\rightsquigarrow$a): Klar.

Wir stellen nun eine Bedingung für schwache Konvergenz auf, die sich direkt aus AELV, Satz 3.4 (Zerlegung linearer Funktionale) ergibt:

Satz 1.3. *In $[\mathfrak{E}; p_j]$ gilt genau dann $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$, wenn für jedes lineare Funktional f, das für irgendein j die Bedingung $|f(\mathfrak{x})| \leqq p_j(\mathfrak{x})$ erfüllt, $f(\mathfrak{x}^{(n)}) \to f(\mathfrak{x})$ gilt.*

§ 2.

Abschnittskonvergenz und Abschnittsdichte.

Wir definieren in diesem Abschnitt unter anderem die Eigenschaften AD, FAK, SAK, und AK und bringen einige grundlegende Sätze über diese Begriffe.

Unter einer *abbrechenden* oder *abgeschnittenen Stelle* $\mathfrak{x} = \{x_k\}$ verstehen wir eine Stelle mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Koordinaten. Die Menge der abbrechenden Stellen nennen wir $\mathfrak{A}$. Jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ ist also eine endliche Linearkombination $\sum x_k \mathfrak{e}_k$ der Stellen $\mathfrak{e}_k = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, die als k-te Koordinate eine Eins besitzen. Der r-te *Abschnitt* $\mathfrak{x}^r$ einer Stelle $\mathfrak{x} = \{x_k\}$ ist die Stelle $\{x_0, \ldots, x_{r-1}, 0, \ldots\}$.

[3]) S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932; zitiert als Banach.

Sei $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ ein FK-Raum. Wir definieren für ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ die Eigenschaften AD, AK, SAK, FAK:

AD: $\mathfrak{x}$ ist in $\mathfrak{E}$ Berührpunkt von $\mathfrak{A}$.

AK: Die Abschnitte $\overset{r}{\mathfrak{x}}$ konvergieren in $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{x}$.

SAK: Die Abschnitte $\overset{r}{\mathfrak{x}}$ konvergieren in $\mathfrak{E}$ schwach gegen $\mathfrak{x}$.

FAK: Für jedes lineare, stetige Funktional f in $\mathfrak{E}$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} x_k f(\mathfrak{e}_k)$.

Die vier Eigenschaften sind abhängig vom zugrunde gelegten Raum $\mathfrak{E}$. Bei ihrer Verwendung wird z. T. stillschweigend $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ vorausgesetzt. In „$\mathfrak{x}$ hat in $\mathfrak{E}$ AK" ist also eingeschlossen, daß $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ ist.

Wir sagen, daß $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft AD besitzt, wenn jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ AD hat, usw.

Wir charakterisieren kurz diese Eigenschaften: $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ seien FK-Räume, Φ eine lineare, stetige Operation, die $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ abbildet. Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ mit AD ist dann $\Phi(\mathfrak{x})$ festgelegt durch die Werte $\Phi(\mathfrak{e}_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, und für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ mit AK gilt dann

$$\Phi(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \Phi(\mathfrak{e}_k).$$

AD hat demgemäß Bedeutung für „Verträglichkeitssätze" (vgl. AELV. § 6), AK für die Darstellung linearer Operationen. Für SAK gilt offenbar der folgende Satz:

Satz 2.1. *Ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ hat genau dann SAK, wenn für jedes lineare, stetige Funktional f in $\mathfrak{E}$ gilt* $f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(\mathfrak{e}_k)$.

Hat $\mathfrak{x}$ FAK, so ist zugelassen, daß $\sum x_k f(\mathfrak{e}_k)$ gegen einen anderen Wert als $f(\mathfrak{x})$ konvergiert.

Bei der oben genannten Operation Φ sind die durch $\{y_n\} = \Phi(\mathfrak{x})$ definierten Funktionale $y_n(\mathfrak{x})$ linear und stetig, m. a. W., Φ ist eine Operation mit linearen, stetigen Funktionalen. SAK erhält damit ebenfalls Bedeutung für die Darstellung linearer Operationen. Der logische Zusammenhang der vier Eigenschaften ist evident:

Satz 2.2. *$AK \rightsquigarrow SAK \overset{\rightsquigarrow AD}{\underset{\rightsquigarrow FAK}{}}$, d. h. hat ein $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{E}$ AK, so auch SAK usw.*

Der nächste Satz gibt Aufschluß darüber, wie sich die vier Begriffe verhalten, wenn verschiedene Räume zugrunde gelegt werden:

Satz 2.3. *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien FK-Räume, $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{F}$. Hat $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{E}$ AK bzw. SAK bzw. AD bzw. FAK, so auch in $\mathfrak{F}$.*

Beweis. Für AD und AK folgt dies aus Satz 4.5 in AELV. Auf Grund dieses Satzes ist weiter jedes lineare, stetige Funktional in $\mathfrak{F}$ ein lineares, stetiges Funktional in $\mathfrak{E}$ (nach Einschränkung des Definitionsbereiches), woraus sich die Behauptung für SAK und FAK ergibt.

In einem FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ bilden die Elemente $\mathfrak{x}$ mit AD die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ (bezüglich des Konvergenzbegriffes von $\mathfrak{E}$; $\overline{\mathfrak{A}}$ hat verschiedene Bedeutung je nach der Wahl von $\mathfrak{E}$), $\overline{\mathfrak{A}}$ ist mit den definierenden Quasinormen von $\mathfrak{E}$ ein FK-Raum $[\overline{\mathfrak{A}}; p_j]$. Auch in $\mathfrak{A}$ wird meistens der Konvergenzbegriff des momentan untersuchten Oberraumes $[\mathfrak{E}; p_j]$ verwendet, d. h. es wird der Q-Raum $[\mathfrak{A}; p_j]$ betrachtet. $[\mathfrak{A}; p_j]$ ist, gleichgültig, wie die p_j gewählt sind, kein FK-Raum; man überlegt sich nämlich leicht, daß $[\mathfrak{A}; p_j]$ nicht vollständig ist. In einem FK-Raum mit AK bilden die $\mathfrak{e}_k$ eine Basis.

§ 3.

Schwache und starke Abschnittskonvergenz.

Wir stellen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auf, daß ein FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ die Eigenschaft AK hat (Satz 3.3), und zeigen, daß ein FK-Raum mit SAK auch AK besitzt (Satz 3.4). Dazu beweisen wir zunächst die beiden folgenden Sätze:

Satz 3.1. *$[\mathfrak{E}; p_j]$ und $[\mathfrak{G}; q_j]$ seien FK-Räume. In $\mathfrak{G}$ gelte*

(1) *Aus $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \mathfrak{G}$ und $|z_k| \leqq |x_k| + |y_k|$ $(k = 0, 1, \ldots)$ folgt*

$$q_j(\mathfrak{z}) \leqq q_j(\mathfrak{x}) + q_j(\mathfrak{y}) \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

Die φ_n seien stetige Quasinormen in $\mathfrak{E}$. Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ sei $\mathfrak{y} = \Phi(\mathfrak{x}) = \{\varphi_n(\mathfrak{x})\} \in \mathfrak{G}$. Dann ist die Abbildung Φ stetig.

Beweis. Wegen (1) sind die Funktionale $q_j(\Phi\mathfrak{x})$ Quasinormen in $\mathfrak{E}$. Die φ_n vermitteln eine fehlkonvergenzfreie Abbildung. Wir definieren nun in $\mathfrak{E}$ einen Konvergenzbegriff durch die Quasinormen $q_j(\Phi\mathfrak{x})$ und p_j. Ähnlich wie bei Banach, S. 41, Th. 7, stellen wir fest, daß $[\mathfrak{E}; p_j, q_j]$ vollständig und daher offenbar ein FK-Raum ist. $[\mathfrak{E}; p_j, q_j]$ und $[\mathfrak{E}; p_j]$ haben als FK-Räume denselben Konvergenzbegriff (siehe AELV, Satz 4.5 b), somit sind die $q_j(\Phi\mathfrak{x})$ stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$ (vgl. AELV, Satz 3.3). Dies bedeutet aber die Stetigkeit der Abbildung Φ. — Für den zweiten Teil des Beweises hätten wir auch Th. 6 aus Banach, S. 41, verwenden können.

Satz 3.2. *$[\mathfrak{E}; p_j]$ sei ein FK-Raum mit AD, p seine F-Norm. Es gelte:*

(2) *Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ mit den Abschnitten $\overset{r}{\mathfrak{x}}$ ist*

$$p(\mathfrak{x} - \overset{r}{\mathfrak{x}}) \geqq p(\mathfrak{x} - \overset{r+1}{\mathfrak{x}}),$$

d. h.

$$p\{0, \ldots, 0, x_r, x_{r+1}, \ldots\} \geqq p\{0, \ldots, 0, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots\} \qquad (r = 0, 1, \ldots).$$

Dann hat $\mathfrak{E}$ die Eigenschaft AK.

Beweis. Wegen AD gibt es zu jedem $\mathfrak{y} \in \mathfrak{E}$ ein $\mathfrak{y}' \in \mathfrak{A}$ mit $p(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') \leqq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben). Sei $y'_k = 0$ $(k > k_0)$. Für $k > k_0$ ist dann wegen (2) erst recht $p(0, \ldots, 0, y_k, y_{k+1}, \ldots) \leqq \varepsilon$, woraus AK folgt.

Satz 3.3. *Ein FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ besitzt genau dann AK, wenn er AD und folgende Eigenschaft besitzt:*

(3) *Für jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ *bilden die Abschnitte* $\overset{r}{\mathfrak{x}}$ *eine beschränkte Folge.*

Beweis. Aus 1.1a und 2.2 folgt, daß die Bedingungen notwendig sind. Sie sind aber auch hinreichend: Die Funktionale $\varphi_{rj}(\mathfrak{x}) = p_j(\mathfrak{x} - \overset{r}{\mathfrak{x}})$ $(r, j = 0, 1, \ldots)$ sind stetige Quasinormen in $\mathfrak{E}$. Man verifiziert nämlich leicht, daß jedes φ_{rj} die Eigenschaften einer Quasinorm besitzt, und die Stetigkeit ergibt sich daraus, daß aus $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ für jedes feste r auch $\overset{r}{\mathfrak{x}}^{(n)} \to \overset{r}{\mathfrak{x}}$ folgt. Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ und $j = 0, 1, \ldots$ gilt nun wegen (3), daß $\chi_r = \varphi_{rj}(\mathfrak{x})$ eine beschränkte Folge ist, d. h. dem BK-Raum $\mathfrak{S}_B$ angehört. $\mathfrak{S}_B$ hat die Norm $\overline{\underset{k=0,1,\ldots}{\text{fin}}} |x_k|$ und also die Eigenschaft (1) aus Satz 3.1. Somit ist für jedes j die Quasinorm $\psi_j = \overline{\underset{r}{\text{fin}}}\, \varphi_{rj}(\mathfrak{x})$ stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$. Daher ist $\mathfrak{E}$ auch mit den definierenden Quasinormen p_j und ψ_j ein FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j, \psi_j]$. Es gilt $\varphi_{0j}(\mathfrak{x}) = p_j(\mathfrak{x})$ und damit $\psi_j(\mathfrak{x}) \geqq p_j(\mathfrak{x})$, d. h. die Quasinormen $p_j(\mathfrak{x})$ sind in $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ stetig. Aus AELV, Satz 3.3, erhalten wir, daß $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ und $[\mathfrak{E}; p_j, \psi_j]$ denselben Konvergenzbegriff haben, d. h. daß auch $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ ein FK-Raum ist, der nach AELV, Satz 4.5b, denselben Konvergenzbegriff wie $[\mathfrak{E}; p_j]$ hat. Demnach hat auch $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ die Eigenschaft AD. Nun ist

$$\psi_j(\mathfrak{x}) = \overline{\underset{k}{\text{fin}}}\, p_j(0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots),$$

daher

$$\psi_j(0, \ldots, 0, x_r, x_{r+1}, \ldots) \geqq \psi_j(0, \ldots, 0, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots) \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Daraus ergibt sich sofort, daß $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ der Forderung (2) aus Satz 3.2 genügt, also auf Grund dieses Satzes AK besitzt. Damit hat auch der mit demselben Konvergenzbegriff versehene Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ AK.

Satz 3.4. *Ein FK-Raum* $\mathfrak{E}$ *hat AK, wenn er entweder SAK oder sowohl FAK als auch AD besitzt.*

Beweis. Besitzt der Raum $\mathfrak{E}$ FAK (oder SAK), so ist in ihm (3) erfüllt, wie man dem Beweis zu Satz 1.1a entnimmt. Hat $\mathfrak{E}$ SAK, so nach 2.2 auch AD. Somit ergibt 3.3 beide Behauptungen.

Wir verwenden nun die Bezeichnung $\mathfrak{F}A$ für die Menge der von der Matrix A in den Raum $\mathfrak{F}$ abgebildeten Stellen. Ist $\mathfrak{F}$ ein FK-Raum, so kann auch $\mathfrak{F}A$ als FK-Raum aufgefaßt werden (vgl. AELV, Satz 4.10). Weiter treten die FK-Räume $\mathfrak{S}_N$ (Raum der Nullfolgen) und $\mathfrak{S}_C$ (Raum der konvergenten Folgen) auf (vgl. AELV, Satz 4.1). $\mathfrak{S}_C A$ ist dann das „*Wirkfeld*“, $\mathfrak{S}_N A$ das „*Nullwirkfeld*“ der Matrix bzw. des Matrixverfahrens A.

Satz 3.5. *In einem FK-Raum der Form* $\mathfrak{F}A \geqq \mathfrak{A}$ *hat ein Element* $\mathfrak{x}$ *genau dann AK bzw. SAK, wenn* $A(\overset{r}{\mathfrak{x}})$ *in* $\mathfrak{F}$ *stark bzw. schwach gegen* $A(\mathfrak{x})$ *konvergiert.*

Beweis. Dies folgt aus der Betrachtung der die Konvergenz definierenden Quasinormen in $\mathfrak{F}A$ (AELV, Satz 4.10) bzw. aus der Darstellung der linearen, stetigen Funktionale in $\mathfrak{F}A$ (AELV, Satz 4.11).

Satz 3.6. *In einem FK-Raum der Form* $\mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{A}$ *hat ein* $\mathfrak{x}$ *genau dann SAK, wenn* $|\sum_{k=0}^{r} a_{nk} x_k| \leqq M (n, r = 0, 1, \ldots)$ *ist. Letztere Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn* $\mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{S}_N$ *und* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B$ *ist.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt aus 3.5 und den Bedingungen für schwache Konvergenz in $\mathfrak{S}_N$. Diese lauten: Für Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}, \mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N$ gilt genau dann $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x} [\mathfrak{S}_N]$, wenn $|x_k^{(n)}| \leqq M$ $(k, n = 0, 1, \ldots)$ und $\lim_{n \to \infty} x_k^{(n)} = x_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ ist. Man vgl. hierzu Banach, S. 136 unten, wo die entsprechenden Bedingungen für $\mathfrak{S}_C$ aufgeführt sind. Der zweite Teil des Satzes folgt daraus, daß im Falle $\mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{S}_N$ die Matrix A die Bedingung (Zn) erfüllt (vgl. etwa AELV, § 1).

Wir schließen den Abschnitt mit einigen einfachen Bemerkungen. Hat ein $\mathfrak{x}$ in jedem der FK-Räume $[\mathfrak{E}^{(i)}; p_{ji}]$ $(i = 0, 1, \ldots)$ AK, so auch im FK-Raum $[\bigcap \mathfrak{E}^{(i)}; p_{ji}]$. Entsprechendes gilt für die Eigenschaften SAK und FAK (vgl. AELV, Satz 4.7), hingegen nicht allgemein für AD. Hat ein $\mathfrak{x}$ in einem FK-Raum $\mathfrak{E}$ AK, so gilt $\lim_{m, n \to \infty} (\overset{m}{\mathfrak{x}} - \overset{n}{\mathfrak{x}}) = 0 [\mathfrak{E}]$, im Falle $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_N A$ insbesondere $\lim_{m, n \to \infty} \overline{\text{fin}}_{s = 0, 1, \ldots} |\sum_{k=m}^{n} a_{sk} x_k| = 0$. Diese Beziehungen geben einigen Aufschluß über die Stellen $\mathfrak{x}$, die in $\mathfrak{E}$ AK haben, und sind ein wertvolles Hilfsmittel bei der Aufstellung von Umkehrbedingungen, z. B. der Bedingung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ für das C_1-Verfahren.

§ 4.

Beispiele für Räume mit AD, AK bzw. FAK.

Beispiel 4.1. *Folgende FK-Räume haben AK:* $\mathfrak{S}_K$, $\mathfrak{S}_N$, $\mathfrak{U}_A$, $[x_k = o(d_k)]$ *bei beliebigen* $d_k \neq 0$, $\mathfrak{S}_K A$ *für eine beliebige Matrix* A.

Beweis. Die betreffenden FK-Räume sind aufgeführt in AELV, Satz 4.1 ($\mathfrak{S}_K$, $\mathfrak{S}_N$, $\mathfrak{U}_A$), Satz 4.10 ($\mathfrak{S}_K A$; man setze dort $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_K$), Satz 5.4 ($x_k = o(d_k)$). Aus der Form der definierenden Quasinormen oder auch aus der Darstellung der linearen Funktionale (wegen 3.4 genügt es ja, SAK zu beweisen) erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung.

Beispiel 4.2. *Ist* A *die Matrix eines der unten aufgeführten Limitierungsverfahren in der „Folgen-Folgen-Form", so hat* $\mathfrak{S}_N A$ *(das „Null-Wirkfeld") AK:*

1. *Permanente (echte) bewichtete arithmetische Mittel;*
2. *Cesàro-Verfahren mit Ordnung* $0 \leqq k \leqq 1$;
3. *Hölder-Verfahren mit Ordnung* $0 \leqq k \leqq 1$;
4. *Unstetige Rieszsche Mittel mit Ordnung* $0 \leqq k \leqq 1$.

Beweis. Für diese Verfahren gelten Ungleichungen der Form

$$|\sum_{k=0}^{r} a_{nk} x_k| \leqq \overline{\text{fin}}_{0 \leqq m \leqq n} |\sum_{k=0}^{m} a_{mk} x_k| \leqq \overline{\text{fin}}_{0 \leqq m < \infty} |\sum_{k=0}^{m} a_{mk} x_k| \leqq M(\mathfrak{x}) \quad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A),$$

woraus man mit Hilfe von 3.6 und 3.4 die Behauptung erhält. Beweise für diese Ungleichungen findet man bei Peyerimhoff, § 6 (Fall 1—3), und in einer Arbeit von W. Jurkat [4]) (Fall 4).

Weiß man schon, daß die Behauptung von 4.2 für die Cesàro-Verfahren richtig ist, so erhält man ihre Richtigkeit für die Hölder-Verfahren aus dem bekannten Äquivalenzsatz unter Verwendung von AELV, Satz 4.5.

Limitierungsverfahren, bei denen eine Ungleichung (ein „Mittelwertsatz") der oben angegebenen Form gilt, haben besonders angenehme Eigenschaften. Die Bedeutung der Mittelwertsätze wird hier darauf zurückgeführt, daß sie in den betreffenden Null-Wirkfeldern AK ergeben. Ausführlich behandelt werden die Mittelwertsätze in einer demnächst erscheinenden Arbeit von W. Jurkat und A. Peyerimhoff [5]).

Wir nennen ein Matrixverfahren A oder eine Matrix A *perfekt* [6]), wenn A *permanent* ist (d. h. $\mathfrak{S}_C A \geq \mathfrak{S}_C$ ist und für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C$ die Gleichung $A\text{-}\lim \mathfrak{x} = \lim x_k$ gilt) und $\mathfrak{S}_C$ in $[\mathfrak{S}_C A]$ (oder — was hier gleichbedeutend ist — $\mathfrak{S}_N$ in $[\mathfrak{S}_N A]$) dicht liegt. Ist A eine *normale* Matrix (d. h. ist $a_{nk} = 0$ für $k > n$, $a_{nn} \neq 0$) und permanent, so ist die Bedingung „$\mathfrak{S}_N$ liegt dicht in $[\mathfrak{S}_N A]$" genau dann erfüllt, wenn aus $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_{nk} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ und $\sum |\beta_n| < \infty$ folgt $\beta_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ (vgl. AELV, § 6).

Beispiel 4.3. *Ist A eine perfekte Matrix, so hat der FK-Raum $\mathfrak{S}_N A$ die Eigenschaft AD.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{S}_N A \geq \mathfrak{S}_N$. Jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N$ ist in $[\mathfrak{S}_N]$, also auch in $[\mathfrak{S}_N A]$ Berührpunkt von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{S}_N$ liegt in $[\mathfrak{S}_N A]$ dicht, somit liegt auch $\mathfrak{A}$ in $[\mathfrak{S}_N A]$ dicht.

Beispiel 4.4. *FAK besitzen die FK-Räume $\mathfrak{S}_B$, $\mathfrak{S}_C$ und alle FK-Räume der Form $\mathfrak{S}_C A$, wo $\mathfrak{S}_N A$ AK hat und A permanent ist.*

Beweis. Sei f ein lineares, stetiges Funktional in $[\mathfrak{S}_C A]$. f definiert ein lineares, stetiges Funktional g in $[\mathfrak{S}_N A]$ mit $g(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A$. $\sum x_k f(\mathfrak{e}_k) = \sum x_k g(\mathfrak{e}_k)$ konvergiert für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A \geq \mathfrak{S}_N$, daher ist $\sum |f(\mathfrak{e}_k)| < \infty$. Jedes $\mathfrak{y} \in \mathfrak{S}_C A$ ist darstellbar in der Form $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + a\{1, 1, \ldots\}$ mit $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A$. Es ist $\sum_{k=0}^{r} y_k f(\mathfrak{e}_k) = \sum_{k=0}^{r} x_k f(\mathfrak{e}_k) + a \sum_{k=0}^{r} f(\mathfrak{e}_k)$, woraus die

[4]) W. Jurkat, Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter, Math. Zeitschr. 55, 8—12 (1951).

[5]) W. Jurkat und A. Peyerimhoff, Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Zeitschr. 55, 92—108 (1951).

[6]) Vgl. hierzu J. D. Hill, On perfect methods of summability, Duke math. J. 3, 702—714 (1937).

Behauptung für die Räume $\mathfrak{S}_C A$ folgt. Ähnlich führt man den Beweis für $\mathfrak{S}_B$ und $\mathfrak{S}_C$ durch Vergleich mit $\mathfrak{S}_N$.

§ 5.

Lineare Operationen in F-Räumen.

Wir bringen einige Sätze über die Darstellung und Fortsetzung linearer Operationen, aus denen die Bedeutung der SAK erhellt.

Satz 5.1. *$[\mathfrak{E}; p_j]$ sei ein Q-Raum, $\mathfrak{D}$ ein linearer Unterraum in $\mathfrak{E}$, $\overline{\mathfrak{D}}$ die Menge der Berührpunkte von $\mathfrak{D}$ in $[\mathfrak{E}; p_j]$, $[\mathfrak{G}; q_i]$ ein F-Raum. Die Operation Φ sei in $\mathfrak{D}$ erklärt und bilde den Q-Raum $[\mathfrak{D}; p_j]$ linear und stetig in $\mathfrak{G}$ ab. Dann läßt sich Φ fortsetzen zu einer Operation $\overline{\Phi}$, die den Q-Raum $[\overline{\mathfrak{D}}; p_j]$ linear und stetig in $\mathfrak{G}$ abbildet.*

Beweis. Jedes $q_i(\Phi \mathfrak{x})$ ist eine stetige Quasinorm in $[\mathfrak{D}; p_j]$ (man vgl. hierzu auch § 8). Nach AELV, Satz 3.2 gilt daher mit geeigneten Zahlen $\varrho = \varrho(i)$ und $m = m(i)$

$$q_i(\Phi \mathfrak{x}) \leqq \varrho\,(p_0(\mathfrak{x}) + \cdots + p_m(\mathfrak{x})) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}).$$

Hieraus ersieht man, daß Φ jede in $[\mathfrak{D}; p_j]$ konzentrierte Folge abbildet in eine in $\mathfrak{G}$ konzentrierte Folge. Sei $\mathfrak{x} \in \overline{\mathfrak{D}}$. Dann gibt es Elemente $\mathfrak{x}^{(n)} \in \mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}]$. Die $\mathfrak{x}^{(n)}$ bilden eine in $[\mathfrak{D}; p_j]$ konzentrierte Folge, somit ist die Folge $\Phi(\mathfrak{x}^{(n)})$ in $\mathfrak{G}$ konzentriert und hat ein Grenzelement $\mathfrak{y}$. Dabei ist

$$q_i(\mathfrak{y}) = \lim_{n \to \infty} q_i(\Phi \mathfrak{x}^{(n)}) \leqq \varrho \lim_{n \to \infty} (p_0(\mathfrak{x}^{(n)}) + \cdots + p_m(\mathfrak{x}^{(n)})) = \varrho\,(p_0(\mathfrak{x}) + \cdots + p_m(\mathfrak{x})).$$

Man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{y}$ nur von $\mathfrak{x}$ abhängt, nicht aber von der Wahl der $\mathfrak{x}^{(n)}$. Die somit definierte Operation $\mathfrak{y} = \overline{\Phi}(\mathfrak{x})$ genügt den Forderungen des Satzes.

Satz 5.2. *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ seien FK-Räume, Φ eine Operation, die $\mathfrak{E}$ linear und stetig in $\mathfrak{G}$ abbildet. Dann sind die durch*

$$\{y_n(\mathfrak{x})\} = \Phi(\mathfrak{x})$$

definierten Funktionale $y_n(\mathfrak{x})$ linear und stetig in $\mathfrak{E}$. Für jedes $\mathfrak{x}$ mit SAK in $\mathfrak{E}$ gilt

$$y_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, y_n(\mathfrak{e}_k).$$

Beweis. Die Behauptung über die Funktionale ist trivial. Der zweite Teil des Satzes folgt nun mit 2.1 (hier wird — vgl. § 2 — $\mathfrak{E} \geqq \mathfrak{A}$ vorausgesetzt).

Satz 5.3. *$[\mathfrak{E}; p_j]$ und $\mathfrak{G}$ seien FK-Räume, $\mathfrak{E} \geqq \mathfrak{A}$. Die Matrixtransformation A bilde $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ ab, d. h. die Stelle $\{y_n\}$ mit*

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, x_k$$

liege für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{G}$. *Die Operation sei stetig als Abbildung des Q-Raumes* $[\mathfrak{A}; p_j]$ *in* $\mathfrak{G}$. *Dann bildet A auch jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$, *das in* $\mathfrak{E}$ *SAK hat, in* $\mathfrak{G}$ *ab.*

Beweis. Wir bezeichnen die Menge der Berührpunkte (abgeschlossene Hülle) von $\mathfrak{A}$ in $[\mathfrak{E}; p_j]$ mit $\overline{\mathfrak{A}}$. Nach 5.1 läßt sich die Operation A fortsetzen zu einer Operation $\overline{A}$, die den Q-Raum $[\overline{\mathfrak{A}}; p_j]$ linear und stetig in $\mathfrak{G}$ abbildet. Nach 5.2 gilt für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$, das in $\mathfrak{E}$ SAK besitzt (jedes solche $\mathfrak{x}$ gehört ja zu $\overline{\mathfrak{A}}$)

$$\overline{A}(\mathfrak{x}) = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k\},$$

da $\overline{A}(\mathfrak{e}_k) = \{a_{nk}\}$ ist für $k = 0, 1, \ldots$.

Satz 5.4. $[\mathfrak{E}; p_j]$ *und* $\mathfrak{G}$ *seien FK-Räume,* $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$. *Die zeilenfinite Matrix A bilde den Q-Raum* $[\mathfrak{A}; p_j]$ *stetig in* $\mathfrak{G}$ *ab. Dann bildet A auch jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$, *das in* $\mathfrak{E}$ *AD besitzt, in* $\mathfrak{G}$ *ab.*

Beweis. $\mathfrak{x}$ habe AD. Dann gibt es Stellen $\mathfrak{x}^{(n)} \in \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}\,[\mathfrak{E}]$. Wie in 5.1 folgt $A(\mathfrak{x}^{(n)}) \to \mathfrak{y}\,[\mathfrak{G}]$, wo $\mathfrak{y}$ ein gewisses Element von $\mathfrak{G}$ ist. Da A zeilenfinit ist, ist $A(\mathfrak{x})$ erklärt und es gilt $A(\mathfrak{x}^{(n)}) \to A(\mathfrak{x})\,[\mathfrak{S}_K]$. Hieraus erhält man $\mathfrak{y} = A(\mathfrak{x})$ und damit die Behauptung.

§ 6.

Konvergenzfaktoren.

$\mathfrak{E}$ sei irgendein FK-Raum, $A = \{a_{nk}\}$ eine Matrix. Zahlen ε_k mit der Eigenschaft

(1) Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ existiert $A\text{-lim}\,(\varepsilon_k x_k)$

nennen wir *A-Limitierbarkeitsfaktoren* (bezüglich $\mathfrak{E}$), im Falle

$$A = S = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

auch kurz *Konvergenzfaktoren* (da dann $\sum \varepsilon_k x_k$ für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ konvergiert).

Satz 6.1. *Die* ε_k *sind genau dann A-Limitierbarkeitsfaktoren bezüglich* $\mathfrak{E}$, *wenn für die Matrix* $B = A\,\mathrm{diag}\,\varepsilon_k$ *gilt* $\mathfrak{S}_C B \supseteq \mathfrak{E}$. *Ist letztere Bedingung erfüllt, so ist das Funktional* $A\text{-lim}\,(\varepsilon_k x_k) = B\text{-lim}\,\mathfrak{x}$ *linear und stetig in* $\mathfrak{E}$.

Beweis. Der erste Teil ist klar, der zweite folgt mit AELV, Satz 4.4c.

Wir nennen A eine Sp-Matrix, wenn $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ existiert.

Satz 6.2. $\mathfrak{E}$ *sei ein FK-Raum,* $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$, *die Zahlen* ε_k *seien A-Limitierbarkeitsfaktoren, A eine Sp-Matrix. Dann gilt:*

a) Es gibt ein lineares, stetiges Funktional f in $\mathfrak{E}$ mit

$$f(e_k) = a_k \varepsilon_k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

b) Für jedes $\underline{x} \in \mathfrak{E}$ mit FAK konvergiert $\sum a_k \varepsilon_k x_k$.

c) Hat $\mathfrak{E}$ FAK, so sind die $a_k \varepsilon_k$ Konvergenzfaktoren bezüglich $\mathfrak{E}$.

Beweis. a) folgt aus 6.1, b) folgt aus a) und der Definition von FAK, c) folgt aus b).

Im Anschluß an 6.2a erhebt sich die Frage, wann Zahlen ε_k mit der Eigenschaft

(2) Es gibt ein lineares, stetiges Funktional f in $\mathfrak{E}$ mit

$$f(e_k) = \varepsilon_k \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

Konvergenzfaktoren sind.

Satz 6.3. *Hat $\mathfrak{E}$ FAK, so sind Zahlen mit der Eigenschaft (2) stets Konvergenzfaktoren. Hat $\mathfrak{E}$ nicht FAK, so gibt es Zahlen ε_k, die (2) genügen, aber nicht Konvergenzfaktoren sind.*

Beweis. Die Behauptungen folgen direkt aus der Definition der FAK.

(2) kann abgewandelt werden, wenn man für $\mathfrak{E}$ eine Darstellung des allgemeinen linearen, stetigen Funktionals kennt (vgl. etwa die Darstellung für $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_C A$ in AELV, Satz 5.2).

A. Peyerimhoff hat in der voranstehenden Arbeit mit Hilfe derartiger allgemeiner Sätze konkrete Bedingungen für Limitierbarkeitsfaktoren bei speziellen Limitierungsverfahren gewonnen.

§ 7.

Iterierte Matrixtransformationen.

Wir benötigen einen weiteren FK-Raum:

Beispiel 7.1. *Der Raum $\mathfrak{U}_C$ der $\underline{x}$, für die $\sum x_k$ konvergiert, ist ein FK-Raum mit der definierenden Quasinorm $\underset{l=0,1,\ldots}{\text{fin}} |\sum_{k=0}^{l} x_k|$. Der FK-Raum $\mathfrak{U}_C$ hat AK.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{U}_C = \mathfrak{S}_C S$, wo S dieselbe Bedeutung wie in § 6 hat. Satz 5.1c aus AELV ergibt die erste Behauptung. Die Behauptung über AK ist evident.

Satz 7.2. *$\mathfrak{E}$ sei ein FK-Raum, $C = \{c_{nk}\}$ eine Matrix. Ist das (lineare) Funktional*

$$f(\underline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} x_k$$

für jedes $\underline{x} \in \mathfrak{E}$ erklärt, so ist f in $\mathfrak{E}$ stetig, und für jedes $\underline{x} \in \mathfrak{E}$ mit SAK gilt

$$f(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{nk} x_k.$$

Beweis. Ist f in $\mathfrak{E}$ erklärt, so bildet $C\,\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{U}_C$ ab, und zwar stetig (AELV, Satz 4. 4). Dies ergibt den ersten Teil der Behauptung. Im zweiten Teil wird (vgl. § 2) stillschweigend $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ vorausgesetzt. Es ist $f(\mathfrak{e}_k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{nk}$, was mit 2. 1 die Behauptung ergibt.

Satz 7. 3. *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ seien FK-Räume, A und B Matrizen. Ist für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ die Abbildung $\mathfrak{y} = B(A\mathfrak{x})$ erklärt und $\mathfrak{y} \in \mathfrak{G}$, so ist die hierdurch vermittelte Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ linear und stetig; und für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ mit SAK gilt $B(A\mathfrak{x}) = (BA)\mathfrak{x}$.*

Die zweite Behauptung besagt, daß die Hintereinanderausführung (Iteration) der Abbildungen B und A dasselbe Ergebnis liefert wie die Abbildung mit der Matrix BA.

Beweis. Die Abbildung $\mathfrak{y} = B(A\mathfrak{x})$ ist nach 7. 2 eine Abbildung mit linearen, stetigen Funktionalen. AELV, Satz 4. 3 ergibt die erste Behauptung. Die zweite folgt direkt aus 7. 2.

Es sei hingewiesen auf naheliegende Erweiterungen von 7. 2 und 7. 3 durch Verwendung anderer Konvergenzbegriffe für Reihen (z. B. CESÀRO-Summierbarkeit). Man vergleiche hierzu 6. 2.

Satz 7. 4. *A sei eine normale, B eine beliebige Matrix. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ seien FK-Räume, $\mathfrak{E}$ habe SAK. Genau dann gilt $\mathfrak{G}B \supseteq \mathfrak{E}A$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) Die Operation $\mathfrak{y} = B(\mathfrak{x})$ ist in $\mathfrak{E}A$ erklärt;

(2) Die Operation $\mathfrak{y} = (BA^{-1})\mathfrak{x}$ bildet $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ ab.

Beweis. Es ist $\mathfrak{E}A = A^{-1}\mathfrak{E}$. Somit gilt genau dann $\mathfrak{G}B \supseteq \mathfrak{E}A$, wenn B den Raum $A^{-1}\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ abbildet. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Operation $\mathfrak{y} = B(A^{-1}\mathfrak{x})$ $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ abbildet. Aus (1) folgt nach 7. 3 die Gleichung $(BA^{-1})\mathfrak{x} = B(A^{-1}\mathfrak{x})$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{E})$, was leicht die Behauptung ergibt.

Zusatz. Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn für jedes n die Zahlen b_{nk} Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{E}A$ sind, d. h. die Matrix $B^{(n)}$ mit $b_{lk}^{(n)} = \begin{cases} b_{nk} & (k \leqq l) \\ 0 & (k > l) \end{cases}$ $\mathfrak{E}A$ in $\mathfrak{S}_C$ abbildet. Auf $B^{(n)}$ kann man nun wieder 7. 4 anwenden (mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_C$), wobei (1) erfüllt ist, da $B^{(n)}$ zeilenfinit ist.

7. 4 leistet manchmal auch Dienste, wenn die Bedingung SAK verletzt ist:

Satz 7. 5. *A sei eine normale, B eine beliebige Matrix. Genau dann ist $\mathfrak{S}_C B \supseteq \mathfrak{S}_C A$, wenn (3), (4) und (5) erfüllt sind:*

(3) Die Operation $\mathfrak{y} = B(\mathfrak{x})$ ist für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A$ erklärt;

(4) Die Operation $\mathfrak{y} = (BA^{-1})\mathfrak{x}$ bildet $\mathfrak{S}_N$ in $\mathfrak{S}_C$ ab;

(5) Die Operation $\mathfrak{y} = B(\mathfrak{x})$ bildet irgendein $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{S}_C A$, $\mathfrak{x}^* \bar{\in} \mathfrak{S}_N A$ in $\mathfrak{S}_C$ ab.

Beweis. Jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A$ läßt sich darstellen in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{z} + a\mathfrak{x}^*$ mit $\mathfrak{z} \in \mathfrak{S}_N A$, $\mathfrak{x}^*$ wie oben. 7. 4 liefert die Behauptung.

Zusatz. 7.5 wurde in etwas veränderter Form von Mazur[7]) bewiesen. Aus Mazurs Bedingungen 2. und 3. folgt (3), aus 2. und 4. ergibt sich (4), während umgekehrt aus (3) und (4) die Bedingungen 2., 3. und 4. folgen. Schließlich ist (5) im wesentlichen mit der Eigenschaft 1. bei Mazur äquivalent.

§ 8.

Durchschnitte von FK-Räumen.

Wir behandeln hier Fragen, die Darstellungsmöglichkeiten für Durchschnitte von FK-Räumen betreffen und erhalten Anwendungen auf „Durchschnitte von Limitierungsverfahren".

Wir beginnen mit einigen einfachen Bemerkungen. $[\mathfrak{E}; p_j]$ und $[\mathfrak{G}; q_i]$ seien zwei Q-Räume. Ist Φ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$, so sind die Funktionale $q_i(\Phi \mathfrak{x})$ Quasinormen in $\mathfrak{E}$. Φ ist genau dann stetig, wenn die $q_i(\Phi \mathfrak{x})$ stetig sind. Im Falle der Stetigkeit gilt für jedes i eine Ungleichung der Form

$$q_i(\Phi \mathfrak{x}) \leqq \varrho \sum{}' p_j(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}), \tag{1}$$

wo in $\sum'$ nur endlich viele Glieder auftreten (vgl. AELV, Satz 3.2). Sind insbesondere $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ FK-Räume mit $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{G}$, so gilt für jedes i eine Ungleichung der Form

$$q_i(\mathfrak{x}) \leqq \varrho \sum{}' p_j(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}) \tag{2}$$

($\sum'$ wie oben), wie aus AELV, Satz 4.5, folgt.

Satz 8.1. *Die* $[\mathfrak{E}^{(i)}; p_{ji}]$ *seien FK-Räume,* $\mathfrak{E}^{(i)} \geqq \mathfrak{E}^{(i+1)} \geqq \mathfrak{A}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. *Zu jedem* i *gebe es ein* $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}^*(i)$ *mit*

$$\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{E}^{(i)}, \quad \mathfrak{x}^* \bar{\in} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(i)}, \quad \mathfrak{x}^* \text{ hat SAK in } \mathfrak{E}^{(i)}. \tag{3}$$

Dann gilt für jeden BK-Raum $[\mathfrak{G}; q]$ *und jede Matrix* A *die Ungleichung* $\mathfrak{G}A \neq \mathfrak{E}$, *wo* $\mathfrak{E} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(i)}$ *gesetzt ist.*

Beweis. Wir dürfen $\mathfrak{G}A \geqq \mathfrak{E}$ annehmen. A bildet dann den FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_{ji}]$ (vgl. AELV, Satz 4.7) in $\mathfrak{G}$ ab, und zwar stetig. $q(A\mathfrak{x})$ ist also eine stetige Quasinorm in $\mathfrak{E}$ und es gilt eine Ungleichung der Form ($\sum'$ wie oben)

$$q(A\mathfrak{x}) \leqq \varrho \sum_{i,j}{}' p_{ji}(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}). \tag{4}$$

l sei die größte Zahl, die als zweiter Index eines p_{ji} in $\sum'$ vorkommt. Wegen $\mathfrak{E}^{(i)} \geqq \mathfrak{E}^{(l)} > \mathfrak{E}$ $(i = 0, \ldots, l)$ und der Beziehung (2) gilt nun

[7]) S. Mazur, Über lineare Limitierungsverfahren. Math. Zeitschr. 28, 599–611 (1928): Satz IV.

auch eine Ungleichung der Form

$$q(Ax) \leqq \varrho \sum_j' p_{\mathfrak{A}}(x) \qquad (x \in \mathfrak{E}), \tag{5}$$

d. h. A bildet den Q-Raum $[\mathfrak{E}; p_{\mathfrak{A}}]$ und wegen $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ auch den Q-Raum $[\mathfrak{A}; p_{\mathfrak{A}}]$ stetig in $\mathfrak{G}$ ab. Nach 5.3 bildet A auch das x^*, das (3) mit $i = l$ genügt, in $\mathfrak{G}$ ab, d. h. es ist $\mathfrak{G}A > \mathfrak{E}$.

Satz 8.2. *Die* $[\mathfrak{E}^{(i)}; p_{\mathfrak{A}}]$ *seien FK-Räume,* $\mathfrak{E}^{(i)} \supseteq \mathfrak{E}^{(i+1)} \supseteq \mathfrak{A}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. *Zu jedem* i *gebe es ein* x^* *mit*

$$x^* \in \mathfrak{E}^{(i)},\ x^* \bar{\in} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(j)},\ x^* \text{ hat AD in } \mathfrak{E}^{(i)}. \tag{6}$$

Dann gilt für jeden BK-Raum $\mathfrak{G}$ *und jede zeilenfinite Matrix* A *die Ungleichung* $\mathfrak{G}A + \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(i)}$.

Der Beweis ist fast wörtlich derselbe wie für 8.1, nur ist im letzten Satz 5.3 durch 5.4 und (3) durch (6) zu ersetzen.

Die Voraussetzung $\mathfrak{E}^{(i)} \supseteq \mathfrak{E}^{(i+1)}$ läßt sich in gewissem Umfang umgehen: Sind die $\mathfrak{F}^{(r)}$ irgendwelche FK-Räume, deren Durchschnitt man untersuchen will, so setzt man $\bigcap_{r=0}^{i} \mathfrak{F}^{(r)} = \mathfrak{E}^{(i)}$ und sieht nach, ob (3) bzw. (6) erfüllt ist. Wichtig ist der Spezialfall

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Bei den folgenden Anwendungen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf permanente Matrixverfahren.

Satz 8.3. *Die* $A^{(i)}$ *seien irgendwelche permanente Matrizen,* $\mathfrak{S}_C A^{(i)} \supseteq \mathfrak{S}_C A^{(i+1)}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. *Es gebe zu jedem* i *ein* x^* *mit*

$$x^* \in \mathfrak{S}_C A^{(i)},\ x^* \bar{\in} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(j)},\ x^* \in \mathfrak{S}_B.$$

Dann gibt es keine Matrix A *derart, daß* $\mathfrak{S}_C A = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(i)}$ *ist.*

Beweis. Wegen der Permanenz der Verfahren dürfen wir $x^* \in \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ annehmen. x^* hat dann nach 3.6 in $\mathfrak{S}_N A^{(i)}$, also auch in $\mathfrak{S}_C A^{(i)}$ SAK. 8.1 ergibt die Behauptung.

Satz 8.4. *Mit* $C^{(\alpha)}$ *sei die Matrix des* Cesàroschen *Limitierungsverfahrens* α*-ter Ordnung in der Folgen-Folgen-Form bezeichnet; es gelte* $0 \leqq a < 1$. *Dann gibt es keine Matrix* A *derart, daß* $\mathfrak{S}_C A = \bigcap_{\alpha > a} \mathfrak{S}_C C^{(\alpha)}$ *gilt.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{S}_C C^{(\alpha)} > \mathfrak{S}_C C^{(\beta)}$ für $\alpha > \beta$ ist $\bigcap_{\alpha > a} \mathfrak{S}_C C^{(\alpha)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C C^{(\alpha_n)}$, wo die α_n eine Zahlenfolge mit $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = a$, $\alpha_n \leqq 1$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$

bilden. Die Räume $\mathfrak{S}_N C^{(a_n)}$ haben AK (siehe 4.2), somit hat jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N C^{(a_n)}$ in $\mathfrak{S}_C C^{(a_n)}$ AK. Es gilt $\mathfrak{S}_N C^{(a_n)} > \mathfrak{S}_N C^{(a_{n+1})}$, daher ist 8.1 anwendbar.

Zusatz. Entsprechende Sätze gelten für beliebige Klassen von Matrixverfahren, bei denen die Null-Wirkfelder FK-Räume mit AK bilden.

Satz 8.5. *Die $A^{(i)}$ seien irgendwelche perfekte Matrizen,* $\mathfrak{S}_C A^{(i)} \geqq \mathfrak{S}_C A^{(i+1)} > \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(j)}$. *Dann gibt es keine zeilenfinite Matrix A derart, daß* $\mathfrak{S}_C A = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(i)}$ *gilt.*

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung gibt es zu jedem i ein $\mathfrak{x}^*$ mit $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{S}_C A^{(i)}$, $\mathfrak{x}^* \bar{\in} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(j)}$. Wegen der Permanenz der Verfahren dürfen wir $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ annehmen. $\mathfrak{x}^*$ hat dann wegen der Perfektheit der Verfahren die Eigenschaft AD in $\mathfrak{S}_N A^{(i)}$ und $\mathfrak{S}_C A^{(i)}$, somit ist 8.2 anwendbar.

§ 9.

Größenordnungsbedingungen.

Wir definieren einen weiteren FK-Raum. Die d_k seien irgendwelche nicht verschwindende komplexe Zahlen. Wir schreiben $x_k = O(d_k)$, wenn $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\ldots} \left|\frac{x_k}{d_k}\right| < \infty$ ist.

Beispiel 9.1. *Der Raum der $\mathfrak{x}$ mit $x_k = O(d_k)$ ist ein BK-Raum $[x_k = O(d_k)]$ mit der Norm* $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\ldots} \left|\frac{x_k}{d_k}\right|$.

Beweis. Man zeigt dies ganz ähnlich wie Satz 5.4 aus AELV. Ebenso wie dort könnte man für die d_k auch die Werte 0 und ∞ zulassen.

Hilfssatz 9.2. *Im Raume $[x_k = O(d_k)]$ hat ein $\mathfrak{y}$ genau dann AD (und dann sogar AK), wenn $y_k = o(d_k)$ (d. h.* $\lim_{k \to \infty} \frac{y_k}{d_k} = 0$*) gilt.*

Beweis. Gilt für ein $\mathfrak{y}$ des Raumes $y_k \neq o(d_k)$, so gibt es eine Indexfolge $k_n \uparrow \infty$ mit $\left|\frac{y_{k_n}}{d_{k_n}}\right| \geqq \varepsilon > 0$. Für jedes $\mathfrak{z} \in \mathfrak{A}$ ist dann $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\ldots} \left|\frac{z_k - y_k}{d_k}\right| \geqq \varepsilon$, d. h. $\mathfrak{y}$ hat nicht AD. Jedes $\mathfrak{y}$ mit $y_k = o(d_k)$ hat offenbar AK.

Satz 9.3. *Sei $\mathfrak{E}$ ein FK-Raum; die $d_k \neq 0$ seien irgendwelche komplexe Zahlen, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{E}$ habe AD und es gelte $y_k \neq o(d_k)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{z} \in \mathfrak{E}$ mit $z_k \neq O(d_k)$.*

Beweis. Ist $y_k \neq O(d_k)$, so ist nichts zu beweisen. Nun sei $y_k = O(d_k)$. $\mathfrak{y}$ hat in $\mathfrak{E}$, aber nicht in $[x_k = O(d_k)]$ AD (siehe 9.2). Somit gilt nicht $[x_k = O(d_k)] \geqq \mathfrak{E}$ (vgl. 2.3).

Die folgenden Sätze zeigen, wie 9.3 angewandt werden kann. Wir verwenden dabei das durch $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ definierte Symbol Δ.

Satz 9.4. *Für jedes* $n = 0, 1, \ldots$ *gelte* $\lim_{k\to\infty} d_k^{(n)} = \infty$, $d_k^{(n)} \neq 0$, $\Delta d_k^{(n)} \geqq 0$. *Dann gibt es ein* $\mathfrak{w}$ *mit* $\lim_{k\to\infty} w_k = \infty$, $\Delta w_k \geqq 0$ *und* $w_k = o(d_k^{(n)})$ *für jedes* n.

Beweis. Wir betrachten die FK-Räume $[x_k = o(d_k^{(n)})]$, die nach 4.1 AK besitzen. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ dieser Räume besitzt — aufgefaßt als FK-Raum — ebenfalls AK (vgl. § 3), also auch AD. Es ist $\{1, 1, \ldots\} \in \mathfrak{D}$. Wir wenden 9.3 an mit $y_k = d_k = 1$ und finden, daß ein $\mathfrak{z} \in \mathfrak{D}$ vorhanden ist mit $\overline{\lim_{k\to\infty}} |z_k| = \infty$. Es gibt also eine Folge natürlicher Zahlen k_n mit $\Delta k_n > 0$, so daß $|z_{k_n}|$ monoton gegen ∞ geht. Wir setzen nun

$$w_k = \begin{cases} 0 & (k < k_0) \\ z_{k_n} & (k_n \leqq k < k_{n+1}). \end{cases}$$

Die direkte Konstruktion der Folge w_k ist etwas umständlicher.

Satz 9.5. *A sei eine perfekte Matrix. Für jedes* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A$ *gelte* $x_k = O(d_k)$, *wo die* $d_k \neq 0$ *irgendwelche komplexe Zahlen sind. Dann gilt sogar* $x_k = o(d_k)$ *für* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A$. *Ist weiter* $\overline{\lim_{k\to\infty}} |d_k| = \infty$, *so gilt sogar* $x_k = o(d_k)$ *für* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A$.

Beweis. Der Raum $\mathfrak{S}_N A$ hat AD, 9.3 ergibt daher die erste Behauptung. Jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A$ ist in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + a\{1, 1, \ldots\}$ mit $\mathfrak{y} \in \mathfrak{S}_N A$ darstellbar, was die zweite Behauptung ergibt.

Zusatz. Ist A eine normale, perfekte Matrix, $B = \{b_{nk}\}$ ihre Inverse, so gilt für $l = 0, 1, \ldots$

$$b_{nl} = o\Big(\sum_{k=0}^{n} |b_{nk}|\Big).$$

Beweis. Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A$ gilt $x_n = O\big(\sum_{k=0}^{n} |b_{nk}|\big)$ (dies ist beiläufig die beste Abschätzung dieser Art). Für jedes $l = 0, 1, \ldots$ ist $\{b_{nl}\} \in \mathfrak{S}_N A$. 9.5 ergibt nun die Behauptung.

Zusatz bei der Korrektur. Einfacher beweist man Satz 3.3 so: Die Menge der beschränkten Folgen $\{\mathfrak{x}^{(r)}\}$ mit $\mathfrak{x}^{(r)} \in \mathfrak{E}$ bildet einen F-Raum $\mathfrak{B}$ mit den Quasinormen $\overline{\text{fin}}_{r=0,1,\ldots} p_j(\mathfrak{x}^{(r)})$, die Menge der konvergenten Folgen $\{\mathfrak{x}^{(r)}\}$ einen abgeschlossenen Unterraum $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$. Durch $\mathfrak{x} \to \{\overset{r}{\mathfrak{x}}\}$ wird $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{B}$ abgebildet. Diese Abbildung ist linear und fehlkonvergenzfrei, also nach 1.2 stetig. Für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$ ist $\{\overset{r}{\mathfrak{x}}\} \in \mathfrak{C}$. $\mathfrak{A}$ liegt wegen AD dicht in $\mathfrak{E}$, somit ist $\{\overset{r}{\mathfrak{x}}\} \in \mathfrak{C}$ für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$.

(Eingegangen am 28. Juni 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 71—83 (1951).

Über den Frobenius'schen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen.

Von

Hans-Georg Knoche in Halle.

Herrn Prof. Dr. H. Brandt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit nilpotenten endlichen Gruppen, also mit solchen, deren aufsteigende Zentralreihe die Gruppe selbst enthält, und im besonderen mit p-Gruppen, welche bekanntlich stets nilpotent sind. Sie stellt einen Versuch dar, die Theorie der endlichen Gruppen durch solche Untersuchungen weiterzuführen, die auf den Frobeniusschen[1]) Begriff der Klasse konjugierter Elemente zurückgehen.

Im 1. Abschnitt wird eine Verallgemeinerung des Normalisatorbegriffes folgenden Sinnes behandelt. Der Normalisator $\mathfrak{N}(A)$ eines Elementes A einer Gruppe ist die Gesamtheit der mit A vertauschbaren Elemente der Gruppe oder aller der Elemente der Gruppe, deren Kommutatoren mit A gleich dem Einselement sind. Es zeigt sich, daß auch alle Elemente, deren Kommutator mit A in $\mathfrak{Z}_i$ liegt, wo $\mathfrak{Z}_i$ ein beliebiges Glied der aufsteigenden Zentralreihe einer nilpotenten Gruppe ist, eine Gruppe bilden, die wir den „Normalisator i-ter Stufe" $\mathfrak{N}_i(A)$ von A nennen wollen. So gewinnen wir eine Reihe von Untergruppen, die durch das Element A eindeutig bestimmt ist. Eine Gruppe $\mathfrak{N}_i(A)$ umfaßt $\mathfrak{N}_{i-1}(A)$ als Normalteiler. Nachdem ich diese Reihe der verallgemeinerten Normalisatoren aufgestellt hatte, stellte ich nachträglich fest, daß sie sich auch schon bei Burnside[2]) erwähnt findet, jedoch ohne nähere Behandlung.

Mit der Verallgemeinerung des Normalisatorbegriffes ist auch eine solche des Klassenbegriffes gegeben. Der Grundgedanke dabei ist, daß die nilpotenten Gruppen in gewissem Sinne Verallgemeinerungen Abelscher Gruppen sind; sie sind direkte Produkte ihrer Sylowgruppen. Wir definieren nun i-stufig konjugierte Elemente. Und zwar heißen zwei Elemente A und $B = S^{-1}AS$ i-stufig konjugiert, wenn S in $\mathfrak{N}_i(A)$ liegt. Alle mit A i-stufig konjugierten Elemente bilden eine neue Klasse, die „Klasse i-ter Stufe" von A. Die gewöhnliche Klasse von A zerfällt

[1]) Journ. f. reine u. angew. Math. **100** (1887), S. 179—181.

[2]) The theory of groups, 2. ed., p. 123/4.

auf diese Weise eindeutig in Klassen i-ter Stufe und damit auch die ganze nilpotente Gruppe. Jede dieser Klassen i-ter Stufe ist in einer Nebengruppe von $\mathfrak{Z}_i$ enthalten. Liegt A in $\mathfrak{Z}_{i+1}$, aber nicht in $\mathfrak{Z}_i$, so ist $\mathfrak{N}_i(A) = \mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{N}_{i-1}(A) \neq \mathfrak{G}$. Also stimmt die Klasse i-ter Stufe noch mit der gewöhnlichen Klasse überein, während die Klasse $(i-1)$-ter Stufe von ihr verschieden ist. Ist c die Klasse der Gruppe, also $\mathfrak{Z}_c = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_{c-1} \neq \mathfrak{G}$, so sind alle Normalisatoren $(c-1)$-ter Stufe gleich $\mathfrak{G}$, so daß alle Klassen $(c-1)$-ter Stufe mit den gewöhnlichen Klassen zusammenfallen. Die Klassen 0. Stufe sind die Elemente selbst. Je größer c ist, um so mehr Stufen gibt es, die die gewöhnliche Klasse eines Elementes von diesem trennen. Damit ist eine Beziehung zwischen nilpotenten und Abelschen Gruppen vermittels des Klassenbegriffes hergestellt.

Im 2. Abschnitt werden nur p-Gruppen behandelt. Wir gehen dabei von folgender Überlegung aus. Die einfachsten endlichen Gruppen sind die Abelschen, also diejenigen, deren Klassen nur ein Element enthalten. Es ist zu vermuten, daß die nicht-Abelschen p-Gruppen einer bestimmten Ordnung in ihren Eigenschaften um so mehr von den Abelschen derselben Ordnung abweichen, je größer die Anzahl der Elemente sein kann, die zu einer Klasse gehören. Die nicht-Abelschen p-Gruppen mit höchstens p konjugierten Elementen in einer Klasse haben in der Tat ganz einfache Eigenschaften. Sie sind, wie wir zeigen werden, dadurch charakterisiert, daß die Kommutatorgruppe die Ordnung p hat. Bereits Burnside hat einige Resultate über diese Gruppen angegeben. Wir erhalten weitere Eigenschaften dieser Gruppen, insbesondere bezüglich der Untergruppen vom Index p.

1. Verallgemeinerung des Normalisator- und Klassenbegriffes.

1. 1. Verallgemeinerte Normalisatoren. Wir betrachten in diesem Kapitel eine nilpotente Gruppe $\mathfrak{G}$ mit der Klasse c. A sei ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}(A)$ der Normalisator von A, also die Gesamtheit der Gruppenelemente, deren Kommutator mit A gleich E ist.

Wir fragen nun nach allen Elementen X aus $\mathfrak{G}$, deren Kommutator (X, A) mit A im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegt. (Der triviale Fall, daß A selbst im Zentrum liegt, sei hier und im folgenden nicht besonders herausgehoben, da alle Behauptungen auch für ihn gelten.)

Haben wir solche Elemente X und Y, so gilt

$$(X, A)(Y, A) = (XY, A). \tag{1}$$

Das Produkt hat also auch die gewünschte Eigenschaft. Die Elemente X bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die wir mit $\mathfrak{N}_1(A)$ bezeichnen und den *Normalisator 1. Stufe* von A nennen wollen.

Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{Z}$ der Normalisator 0. Stufe, d. h. der Normalisator im üblichen Sinne von $A\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$, also

$$\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}_0(A\mathfrak{Z}). \tag{2}$$

Aus der Gleichung (1) folgt, daß die Abbildung $X \to (X, A)$ der Gruppe $\mathfrak{N}_1(A)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{N}_1$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}^*(A)$ von $\mathfrak{Z}$ ist. Die Elemente von $\mathfrak{N}_0$ werden auf E abgebildet und $\mathfrak{N}_0(A)$ ist daher Normalteiler von $\mathfrak{N}_1(A)$. Es gilt

$$\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{N}_0(A) \cong \mathfrak{Z}^*(A), \tag{3}$$

die Faktorgruppe $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_0$ ist (einstufig) isomorph mit $\mathfrak{Z}^*$. $\mathfrak{Z}^*(A)$ wird durch die Kommutatoren (X, A) mit $X < \mathfrak{N}_1(A)$ erzeugt. Nach der Bezeichnungsweise von HALL[3]) schreiben wir dafür

$$\mathfrak{Z}^*(A) = (\mathfrak{N}_1(A), A).$$

In der Zerlegung von $\mathfrak{N}_1(A)$ nach $\mathfrak{N}_0(A)$ bewirken Elemente derselben Nebengruppe von $\mathfrak{N}_0(A)$ dieselbe Transformation von A in AZ^*, $Z^* < \mathfrak{Z}^*(A)$. Denn ist $\mathfrak{N}_0 N_1$ eine solche Nebengruppe und $N_0 N_1$ ein Element daraus, so wird

$$N_1^{-1} N_0^{-1} A N_0 N_1 = N_1^{-1} A N_1 = A Z^*.$$

Bewirken umgekehrt zwei Elemente X, Y dieselbe Transformation von A, so gilt

$$(X, A) = (Y, A) = Z^* \quad \text{und} \quad (XY^{-1}, A) = E,$$

also liegt XY^{-1} in $\mathfrak{N}_0(A)$, und X und Y gehören derselben Nebengruppe von $\mathfrak{N}_0(A)$ an.

Hat $\mathfrak{N}_0$ den Index n_0, $\mathfrak{N}_1$ den Index n_1 unter $\mathfrak{G}$, so gilt $n_1 \leqq n_0$. n_0/n_1 ist die Ordnung von $\mathfrak{Z}^*$. $\mathfrak{Z}^*$ ist dann und nur dann von $\mathfrak{E}$ verschieden, wenn die Klasse von $A\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ weniger Elemente enthält als die Klasse von A in $\mathfrak{G}$.

Die Normalisatoren 1. Stufe zweier konjugierter Elemente sind konjugierte Untergruppen. Daraus schließen wir weiter, daß für konjugierte Elemente A und $B = S^{-1} A S$

$$\mathfrak{Z}^*(A) = \mathfrak{Z}^*(B) \tag{4}$$

gilt.

Unsere bisherigen Untersuchungen können wir weiter ausdehnen, und die nunmehr abzuleitenden Resultate enthalten die oben gewonnenen als Spezialfälle. Es sei $\mathfrak{Z}_i$ das $(i+1)$-te Glied der aufsteigenden Zentralreihe von $\mathfrak{G}$. Alle Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Kommutator mit einem Element A in $\mathfrak{Z}_i$ liegt, bilden eine Gruppe; sie entspricht dem Normalisator 0. Stufe $\mathfrak{N}_0(A\mathfrak{Z}_i)$ von $A\mathfrak{Z}_i$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_i$. Wir nennen sie den

[3]) Proc. London math. Soc. (2) **36** (1933), p. 29—95.

Normalisator i-ter Stufe $\mathfrak{N}_i(A)$ des Elementes A. Es gilt also

$$\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{N}_0(A\,\mathfrak{Z}_i). \tag{2a}$$

Für jedes Element A aus $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{N}_{e-1}(A) = \mathfrak{G}$; denn es ist stets $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ in $\mathfrak{Z}_{e-1}$ enthalten. Nun besteht $\mathfrak{N}_i(A)$ aus allen Elementen $X \subset \mathfrak{G}$, für die (X, A) in $\mathfrak{Z}_i$ liegt und $\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{Z}_{i-1}$ aus allen $X\,\mathfrak{Z}_{i-1}$ aus $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i-1}$, für die $(X\,\mathfrak{Z}_{i-1}, A\,\mathfrak{Z}_{i-1})$ in $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Z}_{i-1}$ liegt. Also gilt

$$\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{Z}_{i-1} = \mathfrak{N}_1(A\,\mathfrak{Z}_{i-1}). \tag{2b}$$

Nach (2a) ist

$$\mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{Z}_{i-1} = \mathfrak{N}_0(A\,\mathfrak{Z}_{i-1}).$$

Wie wir früher gesehen hatten, enthält in einer Gruppe der Normalisator 1. Stufe eines Elementes den Normalisator 0. Stufe als Normalteiler. Daher ist $\mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{Z}_{i-1}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{Z}_{i-1}$ und somit $\mathfrak{N}_{i-1}(A)$ Normalteiler von $\mathfrak{N}_i(A)$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i-1}$ gilt also die Isomorphie

$$\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{Z}_{i-1}/\mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{Z}_{i-1} \cong \mathfrak{Z}_i^*(A)/\mathfrak{Z}_{i-1}, \tag{3a}$$

wobei $\mathfrak{Z}_i^*(A)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{Z}_i$ bedeutet. Wegen

$$\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{Z}_{i-1}/\mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{Z}_{i-1} \cong \mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{N}_{i-1}(A)$$

können wir dafür auch

$$\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{N}_{i-1}(A) \cong \mathfrak{Z}_i^*(A)/\mathfrak{Z}_{i-1} \tag{3b}$$

schreiben.

Liegt A in $\mathfrak{Z}_j$ und nicht in $\mathfrak{Z}_{j-1}$, so ist wegen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_j) \leqq \mathfrak{Z}_{j-1}$ stets $\mathfrak{N}_{j-1}(A) = \mathfrak{G}$. Jedoch ist $\mathfrak{N}_{j-2}(A)$ von $\mathfrak{G}$ verschieden. Denn wäre $\mathfrak{N}_{j-2}(A) = \mathfrak{G}$, so würde $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{j-2} = \mathfrak{N}_0(A\,\mathfrak{Z}_{j-2})$ gelten, was bedeutet, daß $A\,\mathfrak{Z}_{j-2}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{j-2}$ liegt, d. h. in $\mathfrak{Z}_{j-1}/\mathfrak{Z}_{j-2}$. Dann läge aber A in $\mathfrak{Z}_{j-1}$, was der Voraussetzung widerspricht.

Die Normalisatoren i-ter Stufe zweier konjugierter Elemente sind konjugierte Untergruppen.

Auch die Relation (4) läßt sich unter Benutzung der Beziehung (3b) verallgemeinern. Demnach ist

$$\mathfrak{N}_1(A\,\mathfrak{Z}_{i-1})/\mathfrak{N}_0(A\,\mathfrak{Z}_{i-1}) \cong \mathfrak{Z}_1^*(A\,\mathfrak{Z}_{i-1}) = \mathfrak{Z}_1^*(B\,\mathfrak{Z}_{i-1}),$$

wenn $B\,\mathfrak{Z}_{i-1} = S^{-1}\,A\,S\,\mathfrak{Z}_{i-1}$, also

$$\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{N}_{i-1}(A) \cong \mathfrak{Z}_i^*(A)/\mathfrak{Z}_{i-1} \cong \mathfrak{Z}_i^*(B)/\mathfrak{Z}_{i-1}. \tag{4a}$$

Aus der Beziehung $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_i) \leqq \mathfrak{Z}_{i-1}$ folgt, daß $\mathfrak{N}_{i-1}(A)\,\mathfrak{Z}_i$ umfaßt. $\mathfrak{Z}_i$ liegt also im Durchschnitt aller Normalisatoren $(i-1)$-ter Stufe von Elementen aus $\mathfrak{G}$. Sei D ein Element des Durchschnittes. Dann gilt $(\mathfrak{G}, D) \leqq \mathfrak{Z}_{i-1}$, und da $\mathfrak{Z}_i$ die umfassendste Gruppe ist, für die $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_i) \leqq \mathfrak{Z}_{i-1}$, so liegt D in $\mathfrak{Z}_i$. Wir haben somit gefunden, daß $\mathfrak{Z}_i$ der Durchschnitt aller Normalisatoren $(i-1)$-ter Stufe von Elementen der Gruppe ist.

Bezeichnet n_i den Index des Normalisators i-ter Stufe von A, so gehört zu A eine Folge von Zahlen

$$n_0 \geqq n_1 \geqq \cdots \geqq n_{j-1} > n_j = 1,$$

die mit $n_j = 1$ schließt, wenn A in $\mathfrak{Z}_{j+1}$, aber nicht in $\mathfrak{Z}_j$ liegt. Sämtliche n_i sind Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$ und jedes n_i ist Teiler aller vorhergehenden Zahlen der Folge.

Da bei einem beliebigen Automorphismus der Gruppe eine Untergruppe in eine Untergruppe derselben Ordnung übergeht, sind die n_i gegenüber allen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ invariant.

Wir haben damit folgenden Satz:

Satz 1. *Für jedes Element A aus $\mathfrak{G}$ existiert eine eindeutig bestimmte Reihe von Gruppen, die „Normalisatorenreihe" von A,*

$$\mathfrak{N}_0(A) \leqq \mathfrak{N}_1(A) \leqq \cdots \leqq \mathfrak{N}_{j-1}(A) \leqq \mathfrak{N}_j(A) = \mathfrak{N}_{j+1}(A) = \cdots = \mathfrak{N}_{c-1}(A) = \mathfrak{G},$$

deren jede die vorhergehende als Normalteiler enthält, die aber nicht verschieden zu sein brauchen. Sie sind durch die Relation

$$(\mathfrak{N}_i(A), A) \leqq \mathfrak{Z}_i,$$

wobei $\mathfrak{N}_i(A)$ die umfassendste Gruppe mit dieser Eigenschaft ist, definiert. Die Reihe beginnt mit dem Normalisator 0. Stufe und schließt mit $\mathfrak{G}$. Liegt A in $\mathfrak{Z}_{j+1}$, aber nicht in $\mathfrak{Z}_j$, so ist $\mathfrak{N}_j(A) = \mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{N}_{j-1}(A)$ von $\mathfrak{G}$ verschieden. Die Reihe enthält c Glieder, wenn c die Klasse der Gruppe ist. Die letzten $c - j$ Glieder sind mit $\mathfrak{G}$ identisch.

Die Faktorgruppen $\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{N}_{i-1}(A)$ sind gewissen Untergruppen aus dem Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{i-1}$ isomorph.

Der Durchschnitt der Normalisatoren i-ter Stufe aller Elemente ist $\mathfrak{Z}_{i+1}$. Die entsprechenden Glieder der Normalisatorenreihen konjugierter Elemente sind konjugierte Untergruppen.

Korollar. *Die Normalisatoren 0. Stufe von Elementen aus $\mathfrak{Z}_1$ sind Normalteiler der ganzen Gruppe.*

1. 2. Verallgemeinerung des Klassenbegriffes. Die Verallgemeinerung des Normalisatorbegriffes gestattet auch eine solche des Klassenbegriffes. Die Frobeniussche Klasse des Elements A einer Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus *allen* in $\mathfrak{G}$ zu A konjugierten Elementen $X^{-1}AX$ ($X \in \mathfrak{G}$). Nun sei $\mathfrak{G}$ wieder eine nilpotente Gruppe der Klasse c. Dann sind in $\mathfrak{G}$ Elemente vorhanden, deren Normalisator $(c-2)$-ter Stufe von $\mathfrak{G}$ verschieden ist, während der Normalisator $(c-1)$-ter Stufe jedes Elementes mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmt. Wir definieren: Ein Element A aus $\mathfrak{G}$ heißt mit einem anderen Element B *i-stufig konjugiert*, wenn eine Beziehung

$$S^{-1}AS = B$$

besteht, wo S ein Element aus dem Normalisator i-ter Stufe von A ist. Ferner soll ein Element A *i-stufig invariant* heißen, wenn es in $\mathfrak{Z}_{i+1}$, aber nicht in $\mathfrak{Z}_i$ liegt, oder wenn $\mathfrak{N}_i(A) = \mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{N}_{i-1}(A) \neq \mathfrak{G}$ ist.

Zwei i-stufig konjugierte Elemente A und $B = S^{-1}AS$ besitzen denselben Normalisator i-ter Stufe; denn es gilt

$$\mathfrak{N}_i(B) = S^{-1}\mathfrak{N}_i(A)S = \mathfrak{N}_i(A),$$

da $S < \mathfrak{N}_i(A)$. Daher existiert in $\mathfrak{N}_i(B)$ ein Element S^{-1}, daß B in A transformiert: Der Äquivalenzbegriff ist symmetrisch.

Ist ferner A mit B und mit C i-stufig konjugiert,

$$S^{-1}AS = B, \qquad T^{-1}AT = C,$$

so gibt es auch in $\mathfrak{N}_i(B)$ ein Element $S^{-1}T$, daß B in C transformiert: Der Äquivalenzbegriff ist transitiv.

Somit bilden alle mit A i-stufig konjugierten Elemente wieder eine Klasse, die wir die *Klasse i-ter Stufe* von A nennen wollen. Die Klassen $(c-1)$-ter Stufe fallen mit den gewöhnlichen Klassen zusammen (wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, nennen wir sie wie bisher nur „Klassen"). Es gibt aber Klassen $(c-2)$-ter Stufe, die von der $(c-1)$-ter Stufe verchieden sind. Die Klasse 0. Stufe ist das Element selbst.

Ist ein Element i-stufig invariant, so fallen die Klassen $(c-1)$-ter bis i-ter Stufe des Elementes zusammen. Jedoch ist die Klasse $(i-1)$-ter Stufe von ihnen verschieden.

Aus der Definition der Klassen höherer Stufe können wir einige ihrer Eigenschaften ablesen.

Der Normalisator i-ter Stufe eines Elementes A sei von $\mathfrak{G}$ verschieden. Sodann entsteht bei der Transformation von A mit allen Elementen von $\mathfrak{N}_i(A)$ die Klasse i-ter Stufe von A, die von der gewöhnlichen Klasse verschieden ist.

Aus der Eigenschaft von $\mathfrak{N}_i(A)$, daß es alle Elemente umfaßt, deren Kommutator mit A in $\mathfrak{Z}_i$ liegt, folgt, daß die Klasse i-ter Stufe von A in $A\mathfrak{Z}_i$ enthalten ist. Diese Klasse ist einfach der Komplex der mit A im gewöhnlichen Sinne konjugierten Elemente in $A\mathfrak{Z}_i$. Die Anzahl der Elemente ist n_0/n_i, wenn n_0 bzw. n_i den Index von $\mathfrak{N}_0(A)$ bzw. $\mathfrak{N}_i(A)$ unter $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Da n_i nach Voraussetzung von 1 verschieden ist, enthält $A\mathfrak{Z}_i$ auch nicht die ganze gewöhnliche Klasse von A, da diese n_0 Elemente enthält.

Zerlegen wir $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{N}_i(A)$,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_i(A) + \mathfrak{N}_i(A)T_2 + \cdots + \mathfrak{N}_i(A)T_{n_i},$$

so transformieren die Elemente von $\mathfrak{N}_i(A)T_k$ $(k = 2, 3, \ldots, n_i)$ A in die mit A konjugierten Elemente, die in der Nebengruppe

$$T_k^{-1}AT_k\mathfrak{Z}_i$$

liegen. Das Element $T_k^{-1}AT_k$ besitzt den Normalisator i-ter Stufe $T_k^{-1}\mathfrak{N}_i(A)T_k$, dessen Elemente $T_k^{-1}AT_k$ in Elemente von $T_k^{-1}AT_k\mathfrak{Z}_i$ transformieren.

Wir haben gefunden, daß *die (gewöhnliche) Klasse* $(c-1)$*-ter Stufe eines Elementes eindeutig in Klassen i-ter Stufe zerfällt, und damit auch die ganze nilpotente Gruppe.*

Bemerkenswert sind noch die Klassen 1. Stufe, wenn sie von denen 0. Stufe verschieden sind. Sei $\mathfrak{N}_1(A)$ umfassender als $\mathfrak{N}_0(A)$. Dann transformieren die Elemente von $\mathfrak{N}_1(A)$ A in $A\mathfrak{Z}^*(A)$, $\mathfrak{Z}^*(A) = (\mathfrak{N}_1(A), A)$. Die anderen Klassen 1. Stufe sind die Komplexe $T_k^{-1}AT_k\mathfrak{Z}^*(A)$, wo T_k nicht in $\mathfrak{N}_1(A)$ liegt. Die gewöhnliche Klasse zerfällt in die n_1 Nebengruppen

$$A\mathfrak{Z}^*,\ T_2^{-1}AT_2\mathfrak{Z}^*,\ \ldots,\ T_{n_1}^{-1}AT_{n_1}\mathfrak{Z}^*.$$

Es ist wohl möglich, daß einmal die Klasse i-ter Stufe mit der $(i-1)$-ten eines Elementes zusammenfällt. Jedoch ist es unmöglich, daß dies für alle Elemente bei der gleichen Stufe eintritt; denn das wäre gleichbedeutend mit $\mathfrak{Z}_{i+1} = \mathfrak{Z}_i$.

1. 3. Beispiele. 1. Wir betrachten die p-Gruppe $(p > 2)$ der Ordnung p^3 mit den definierenden Relationen

$$P^p = E,\ Q^p = E,\ R^p = E,\quad (P, R) = E,\ (Q, P) = E,\ (Q, R) = P.$$

Die Gruppe besitzt das Zentrum $\mathfrak{Z} = \{P\}$, das mit der Kommutatorgruppe identisch ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ hat die Ordnung p^2, ist also abelsch und $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_2$. Die Klassen 1. Stufe sind die p 0-stufig invarianten Zentrumselemente und die Nebengruppen von $\mathfrak{Z}$.

2. $\mathfrak{G}$ sei die p-Gruppe $(p > 2)$ der Ordnung p^4, definiert durch

$$P^{p^2} = E,\ Q^p = E,\ R^p = E,\quad (P, R) = Q,\ (P, Q) = P^p,\ (Q, R) = E.$$

Wir sehen, daß Q und P^p die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ erzeugen, $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{Q, P^p\}$. Das Zentrum wird durch P^p erzeugt, $\mathfrak{Z} = \{P^p\}$, während $\mathfrak{Z}_2$ mit $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ identisch ist. Daher hat $\mathfrak{G}$ die Klasse $c = 3$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_3$. Da das Zentrum die Ordnung p hat, wird in jedem Falle die Gruppe $\mathfrak{Z}^*$, wenn von $\mathfrak{E}$ verschieden, mit dem Zentrum übereinstimmen. Die Klassen 2. Stufe in $\mathfrak{G}$ sind für $p = 3$ folgende.

Die Elemente E, P^3, P^6 bilden das Zentrum, jedes Element bildet für sich eine Klasse 2. (und auch 1. und 0.) Stufe. Daneben gibt es folgende Klassen 2. Stufe mit $n_0 = 3$ Elementen:

a) $Q,\ QP^3,\ QP^6$
$Q^2,\ Q^2P^3,\ Q^2P^6$

b) $R,\ RQ^2,\ RQP^3$
$R^2,\ R^2Q^2,\ R^2Q^2P^6$
$RP^3,\ RQ^2P^3,\ RQP^6$
$R^2P^3,\ R^2QP^4,\ R^2Q^2$
$RP^6,\ RQ^2P^6,\ RQ$
$R^2P^6,\ R^2QP^6,\ R^2Q^2P^3.$

Wir sehen, daß die unter a) aufgeführten Klassen Nebengruppen von $\mathfrak{Z}$ sind. Die Elemente Q, QP^3, QP^6 bilden die Klasse 2. und 1. Stufe von Q; der Normalisator 0. Stufe ist $\mathfrak{N}_0(Q) = \{Q, R, \mathfrak{Z}\}$ und der 1. Stufe $\mathfrak{N}_1(Q) = \mathfrak{G}$. Q ist 1-stufig invariant.

Die unter b) aufgeführten Klassen enthalten nur noch mod $\mathfrak{Z}$ inkongruente Elemente, woraus zu schließen ist, daß der Normalisator

1. Stufe mit dem 0. Stufe übereinstimmt. Es ist $\mathfrak{N}_0(R) = \{Q, R, \mathfrak{Z}\} = \mathfrak{N}_1(R)$. Die Klassen 1. und 0. Stufe fallen zusammen. $\mathfrak{Z}^*(R)$ ist gleich $\mathfrak{E}$ und $n_1 = n_0 = 3$.

Schließlich gibt es noch Klassen 2. Stufe mit je 9 Elementen, z. B.

$$P,\ P^2,\ P^3,\ PQ,\ P^2Q,\ P^3Q,\ PQ^2,\ P^2Q^2,\ P^3Q^2,$$

oder

$$P\mathfrak{Z}^*,\ PQ\mathfrak{Z}^*,\ PQ^2\mathfrak{Z}^*,$$

wo $P\mathfrak{Z}^*$ die Klasse 1. Stufe von P, $PQ\mathfrak{Z}^*$ die von PQ und $PQ^2\mathfrak{Z}^*$ die von PQ^2 bildet. Hier sind die Klassen verschiedener Stufen verschieden. Die Normalisatoren sind

$$\mathfrak{N}_0(P) = \{P\} < \mathfrak{N}_1(P) = \{Q, P\} < \mathfrak{N}_2(P) = \mathfrak{G},$$

und $n_0 = 9$, $n_1 = 3$.

2. *p*-Gruppen.

Wir wenden uns in diesem Kapitel den p-Gruppen zu und werden einige Eigenschaften dieser Gruppen ableiten, wobei wir uns auf den gewöhnlichen Normalisator- und Klassenbegriff stützen.

2. 1. Allgemeines[4]. Es gilt für die Ordnung einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$ $(p > 2)$ eine Gleichung

$$p^n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r, \quad a_r \neq 0. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet a_i die Anzahl der Klassen, die p^i-Elemente enthalten. Wir nennen sie kurz p^i-Klassen. a_0 ist eine Potenz von p, $a_0 = p^z$, die Ordnung des Zentrums $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$. Man sieht leicht ein, daß

$$r < n - z \tag{2}$$

gelten muß, da der Normalisator eines Elementes das Zentrum der Gruppe als eigentliche Untergruppe enthält. Da ferner $z \geqq 1$ gilt, ist immer

$$r \leqq n - 2. \tag{2 a}$$

p^r ist der größte Index eines Normalisators eines Elementes, der überhaupt auftreten kann. Daher liegt jede p^r-Potenz eines Elementes in jedem Normalisator, also auch in deren Durchschnitt $\mathfrak{Z}$. Nun habe die Kommutatorgruppe $\mathfrak{H} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ die Ordnung p^h. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ abelsch ist, enthält eine Nebengruppe von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ mit einem Element auch die ganze Klasse desselben. Daher kann die Anzahl der Elemente in einer Klasse die Ordnung der Kommutatorgruppe nicht übersteigen. Wir haben die Relation

$$r \leqq h. \tag{3}$$

[4]) Vgl. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Auflage (1927), S. 69 ff.

Aus ihr ergibt sich ein kurzer Beweis für die folgende, schon von BURNSIDE[5]) erwähnte Tatsache:

Ist in $\mathfrak{G}$ $r = n-2$, *so hat* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ *die Ordnung* p^{n-2} *und das Zentrum die Ordnung* p.

Beweis. Da der Index von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ durch p^3 teilbar ist, muß wegen (3) $h = n-2$ sein, und aus der Relation (2) folgt $z = 1$.

An dieser Gruppe ist bemerkenswert, daß die Kommutatorgruppe die größtmögliche Ordnung und das Zentrum die kleinstmögliche Ordnung besitzt und dabei die größtmögliche Anzahl von konjugierten Elementen in einer Klasse vorkommt. Wir werden im nächsten Paragraphen den entgegengesetzten Fall kennenlernen, wo die Verhältnisse genau umgekehrt liegen.

2. 2. p-Gruppen mit $r = 1$[5]). Von nun an bedeute ständig $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe mit $r = 1$. Ein nicht selbstkonjugiertes Element A von $\mathfrak{G}$ hat einen Normalisator $\mathfrak{N}(A)$ vom Index p unter $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ kann erzeugt werden durch $\mathfrak{N}(A)$ und ein Element B, das nicht in $\mathfrak{N}(A)$ liegt:

$$\mathfrak{G} = \{B, \mathfrak{N}(A)\} = \mathfrak{N}(A) + B\mathfrak{N}(A) + \cdots + B^{p-1}\mathfrak{N}(A). \tag{4}$$

Das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist in jedem Normalisator enthalten, und da bei unseren Voraussetzungen jeder von $\mathfrak{G}$ verschiedene Normalisator den Index p unter $\mathfrak{G}$ hat, also maximaler Normalteiler ist, umfaßt das Zentrum als Durchschnitt mehrerer maximaler Normalteiler den Durchschnit $\mathfrak{D}$ aller maximalen Normalteiler. Es gilt also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \geqq \mathfrak{D}$ und da $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ abelsch ist, gilt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \geqq \mathfrak{D} \geqq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$. Daher ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ abelsch und zwar vom Typus $(p, p, \ldots, p)$, da jede p-te Potenz eines Elementes in $\mathfrak{Z}$ liegt. $\mathfrak{G}$ hat die Klasse $c = 2$.

Da alle Normalisatoren von Elementen Normalteiler sind, sind konjugierte Elemente miteinander vertauschbar. Eine Klasse kann durch folgendes Verfahren gebildet werden. Sind A, B zwei nicht vertauschbare Elemente, so sind die p-Elemente

$$A,\ B^{-1}AB,\ \ldots,\ B^{-p+1}AB^{p-1}$$

und ebenso die Elemente

$$B,\ A^{-1}BA,\ \ldots,\ A^{-p+1}BA^{p-1}$$

alle untereinander verschieden, bilden also die Klasse von A bzw. B. Diese Tatsache benutzen wir, um den folgenden, im wesentlichen ebenfalls schon BURNSIDE[6]) bekannten Satz zu beweisen:

Satz 2. *In* $\mathfrak{G}$ *hat* $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ *die Ordnung* p, *und wenn umgekehrt in einer beliebigen* p-*Gruppe die Kommutatorgruppe die Ordnung* p *hat, so ist in dieser Gruppe* $r = 1$.

---

[5]) a. a. O. [2]), p. 125/6.

[6]) a. a. O. [2]), p. 126, wo nur der 1. Teil des Satzes genannt wird.

Beweis. Es sei also in $\mathfrak{G}$ $r = 1$. $(A, B) = K \neq E$ sei ein Kommutator zweier Elemente aus $\mathfrak{G}$, (A', B') ein anderer von E verschiedener Kommutator mit $A', B' < \mathfrak{G}$. Dann wählen wir ein weiteres Element $A'' < \mathfrak{G}$, welches nicht in $\mathfrak{N}(B)$ und nicht in $\mathfrak{N}(B')$ liegt. Unter diesen Voraussetzungen liegt A'' in $A^i\mathfrak{N}(B)$, $i \not\equiv 0, (p)$, so daß wegen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$

$$(A'', B) = (A, B)^i = K^i$$

wird. Ebenso finden wir

$$(A'', B') = (A'', B)^j = K^{ij}, \qquad j \not\equiv 0, (p),$$

und schließlich

$$(A', B') = (A'', B')^k = K^{ijk}, \qquad k \not\equiv 0, (p).$$

Wir sehen, daß der Kommutator eines beliebigen Paares von Gruppenelementen als Potenz eines und desselben Elementes dargestellt werden kann. Da jede p-te Potenz in $\mathfrak{Z}$ liegt, ist auch die p-te Potenz eines Kommutators gleich E. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ ist also eine zyklische Gruppe der Ordnung p.

Hat andererseits in einer beliebigen p-Gruppe $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ die Ordnung $p^h = p$, so folgt aus (3) $r = 1$, da $r = 0$ bedeutet, daß die Gruppe abelsch ist.

Die p-Gruppen mit $r = 1$ sind also dadurch charakterisiert, daß ihre Kommutatorgruppe die Ordnung p hat.

Korollar. *Hat in einer p-Gruppe die Kommutatorgruppe die Ordnung p^2, so ist $r = 2$.*

Dies folgt aus (3) und Satz 2.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel einer Gruppe der Ordnung p^5 zeigt. Sie sei erzeugt durch

$$P_1^p = E,\ P_2^p = E,\ P_3^p = E,\ Q_1^p = E,\ Q_2^p = E,\ Q_3^p = E,$$
$$(P_1, P_2) = Q_3,\ (P_2, P_3) = Q_1,\ (P_3, P_1) = Q_2,\ (P_i, Q_j) = E,\ (Q_i, Q_j) = E.$$

Die Kommutatorgruppe ist gleich dem Zentrum, das die Ordnung p^3 besitzt. Daher muß nach (2) ein Normalisator eines Elementes wenigstens die Ordnung p^4 haben. Also ist $r = 2$. Diese Gruppe besitzt keine p-Klassen. Denn ein Normalisator vom Index p müßte die Form $\{P_i, P_k, \mathfrak{Z}\}$ haben, wo P_i, P_k beliebige Elemente sind, die den Normalisator zusammen mit $\mathfrak{Z}$ erzeugen. Er enthält aber keine nichtinvarianten Elemente, die mit allen Elementen dieser Gruppe vertauschbar sind.

Wir sind nun auf Grund obigen Satzes in der Lage, mit Hilfe der Erweiterungstheorie von O. Schreier[7]) die definierenden Relationen für die p-Gruppen mit $r = 1$ hinzuschreiben. Das Erweiterungsproblem lautet hier: Es sind alle nichtisomorphen p-Gruppen der Ordnung p^n

[7]) Monatshefte f. Math. u. Physik 34 (1926), S. 165—180.

mit einer Kommutatorgruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung p bei vorgegebener Faktorgruppe $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ zu konstruieren, wo $\mathfrak{F}$ vom Typus $(p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_s})$ mit $\sum_{i=1}^{s} n_i = n-1$ ist.

Die definierenden Relationen für eine solche Gruppe lauten:

$$H^p = E,\ F_i^{p^{n_i}} = H^{h_i},\ (H, F_i) = E,\ (F_i, F_j) = H^{h_{ij}}.$$

Dabei dürfen nicht alle $h_{ij} \equiv 0, (p)$ sein, da die Gruppe dann abelsch wäre.

Es wäre nun, um alle Gruppen mit $r = 1$ der Ordnung p^n zu bestimmen, festzustellen, welche *nichtisomorphen* Gruppen dieser Art isomorphe Faktorkommutatorgruppen besitzen [8]).

Wir zählen einige weitere Eigenschaften der Gruppen mit $r = 1$ auf. *Alle p^i-ten Potenzen in einer solchen Gruppe bilden eine Gruppe.* Denn nach der bekannten Potenzregel wird für zwei Elemente A und B

$$(AB)^{p^i} = A^{p^i} B^{p^i} (B, A)^{p^i (p^i-1)\,2}.$$

Da p ungerade und $(B, A)^{p^i}$ nach vorigem Satz gleich E ist, folgt die Behauptung [9]).

$\mathfrak{G}$ sei durch den Normalisator $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ von A und ein Element B erzeugt. B gehört nicht zu $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ und besitzt auch einen von $\mathfrak{N}(A)$ verschiedenen Normalisator $\mathfrak{N}'(B)$. Denn andernfalls läge B in $\mathfrak{N}(A)$. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ sei das Zentrum von $\mathfrak{N}$, bestehend aus allen Elementen aus $\mathfrak{N}$, die in $\mathfrak{N}$ selbstkonjugiert sind. Dann liegt der Durchschnitt $\mathfrak{N}'(B) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$; denn diese Elemente sind sowohl mit B als auch mit allen Elementen von $\mathfrak{N}$ vertauschbar. Andererseits enthält aber $\mathfrak{N}'(B)$ als Normalisator $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, ebenso $\mathfrak{N}(A)$, also auch $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$. Daraus folgt die Beziehung

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{N}'(B) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{N}).$$

Ist $\mathfrak{N}$ ein Abelscher maximaler Normalteiler, so ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ Durchschnitt zweier maximaler Normalteiler, hat also den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$. Da in diesem Falle jeder maximale Normalteiler, der $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ umfaßt, abelsch ist, ist also jeder Normalisator von Elementen aus p-Klassen ein Abelscher maximaler Normalteiler. Da es ferner wenigstens zwei verschiedene Normalisatoren vom Index p gibt, ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ vom Typus (p, p), so daß es genau $p+1$ Normalisatoren vom Index p gibt, und diese sind alle abelsch.

Ferner ist jeder Abelsche maximale Normalteiler Normalisator. Denn es gibt in ihm ein nichtinvariantes Element, mit dem die p^{n-1}-Elemente des Normalteilers vertauschbar sind. Wir haben den Satz:

---

[8]) Vgl. H. Liermann, *Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p + 2$ ist.* Schriften d. Math. Inst. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin, Bd. 4 (1938). Dort ist das Problem vollständig gelöst.

[9]) Hall, a. a. O. [3]), p. 75.

Satz 3. *Existiert in $\mathfrak{G}$ ein Abelscher maximaler Normalteiler, so ist dieser Normalisator von Elementen aus p-Klassen, und es sind in $\mathfrak{G}$ dann alle Normalisatoren vom Index p abelsch. Das Zentrum hat den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$ und es gibt genau $p+1$ Normalisatoren von Elementen aus p-Klassen.*

Zu diesem Typ der p-Gruppen gehört die bekannte p-Gruppe mit einem zyklischen maximalen Normalteiler. Bekanntlich enthält sie dann wenigstens p solche. Aus dem oben Gesagten folgt dann, daß das Zentrum den Index p^2 besitzt, so daß $r = 1$ ist. Das ist das Gegenstück zu der am Schluß von 2.1 erwähnten Gruppe.

Korollar. *Gibt es in einer beliebigen p-Gruppe zwei Abelsche maximale Normalteiler, so ist $r = 1$.*

Denn das Zentrum der Gruppe muß den Durchschnitt der beiden Normalteiler umfassen. — Ferner gilt der Satz:

Satz 4. *Ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ vom Index p ist Normalisator aller und nur der Elemente, die in seinem Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ und nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen.*

Denn ist $\mathfrak{N}$ Normalisator von A, so liegt A in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$. Zum anderen ist $\mathfrak{N}$ Normalisator der Elemente aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, die nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen, da mit diesen genau p^{n-1}-Elemente vertauschbar sind. Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir weiter:

Satz 5. *Hat $\mathfrak{G}$ die Ordnung p^n und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ die Ordnung p^z, so ist $n - z \equiv 0 \mod (2)$.*

Beweis. Der Satz gilt für alle p-Gruppen mit $r = 1$ der Ordnung p^3. Er sei nun bewiesen für alle Gruppen der Ordnung p^m, wobei $m \leqq n-1$. $\mathfrak{G}$ habe die Ordnung p^n. $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ seien zwei Normalisatoren von Elementen aus p-Klassen in $\mathfrak{G}$. Ist einer der Normalisatoren abelsch, so ist der Satz nach obigem bewiesen. Also sei kein Abelscher Normalteiler vom Index p vorhanden. Dann besitzt $\mathfrak{N}$ ein Zentrum vom Index $p^{2\nu}$ unter $\mathfrak{N}$, das $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ umfaßt. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ kann nicht in $\mathfrak{N}'$ enthalten sein, da sonst wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{N}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ folgen würde, und $\mathfrak{N}$ wäre nach dem letzten Satz nicht Normalisator. Also erzeugt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ mit $\mathfrak{N}'$ die ganze Gruppe, und es besteht die Isomorphie

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}' \simeq \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}),$$

woraus folgt, daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ den Index p unter $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, also den Index $p^{2\nu+2}$ unter $\mathfrak{G}$ hat.

Korollar I. *Die Zentren der Normalisatoren von Elementen aus p-Klassen haben dieselbe Ordnung.*

Denn die letzte Isomorphie gilt für irgend zwei Normalisatoren $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$.

Korollar II. *Jeder maximale Normalteiler, der $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ umfaßt, ist Normalisator.*

Denn nach dem Satz enthält das Zentrum des Normalteilers $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ eigentlich, und der Normalteiler ist Normalisator der Elemente aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, die nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen.

Das gestattet uns, die Anzahl der Normalisatoren von Elementen aus p-Klassen zu bestimmen. Sie ist gleich der Anzahl der maximalen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ vom Typus $(p, p, \ldots, p)$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ hat die Ordnung p^{n-s}, woraus sich also die gesuchte Anzahl

$$\frac{p^{n-s}-1}{p-1} = p^{n-s-1} + p^{n-s-2} + \cdots + p + 1$$

ergibt.

Einige Beispiele mögen das Vorhergehende erläutern.

Die beiden nicht-abelschen Gruppen der Ordnung p^3 sind

1. $$P^{p^2} = E,\ Q^p = E,\ (P, Q) = P^p.$$

Hier ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P^p\}$ von der Ordnung p. $\{P\}$ ist ein zyklischer maximaler Normalteiler.

2. $$P^p = E,\ Q^p = E,\ R^p = E,\ (P, Q) = E,\ (P, R) = E,\ (Q, R) = P,$$

mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P\}$. Hier existiert kein zyklischer maximaler Normalteiler.

Die nicht-abelschen Gruppen der Ordnung p^4 zerfallen in 6 Gruppen der Klasse $c = 2$ — bei ihnen ist $r = 1$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ hat die Ordnung p^2, wie es sein muß — und 4 Gruppen der Klasse $c = 3$, wo also $r = 2$, $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ von der Ordnung p^2 und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ von der Ordnung p ist.

So hat z. B. die durch

$$P^{p^2} = E,\ Q^p = E,\ (P, Q) = P^{p^2}$$

definierte Gruppe einen zyklischen maximalen Normalteiler und damit die Klasse $c = 2$. Es ist

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P^{p^2}\},\ \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{P^p\}.$$

Die durch

$$P^p = E,\ Q^p = E,\ R^p = E,\ S^p = E,$$
$$(R, S) = Q,\ (Q, S) = P,\ (P, S) = (Q, R) = (P, R) = (Q, P) = E$$

definierte Gruppe hat die Klasse $c = 3$. Hier ist

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P, Q\},\ \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{P\}.$$

$\{R, Q, P\}$ ist der einzige maximale Abelsche Normalteiler.

Die weiteren Gruppen der Ordnung p^4 findet man bei Burnside [10]). Gruppen der Ordnung p^5 sind bei O. Schreier vollständig angegeben [11]).

[10]) a. a. O. [2]), p. 145.

[11]) Abh. aus d. Math. Sem. Hamburg, Bd. 4 (1926), S. 337 ff.

(Eingegangen am 7. Mai 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 84—91 (1951).

A Theorem on the Riemann-Liouville Integral

By

M. Parthasarathy and **C. T. Rajagopal** in Madras (India).

1. M. Riesz [7, §§ 5, 6, 7] [1]) has proved a theorem on the Riemann-Liouville integral which includes the following as a useful special case.

Theorem A. *Let $\varphi(x)$ be a function of bounded variation in every finite interval of $x \geqq 0$. Let*

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt, \quad \alpha > 0.$$

Let $0 < \gamma < r$. Then the hypotheses (i) $\varphi(x) = O(x^l)$, $l \geqq 0$, *as* $x \to \infty$, (ii) $\Phi_r(x) = O(x^k)$, $k \geqq 0$, *as* $x \to \infty$, *together ensure the conclusion*

$$\Phi_\gamma(x) = O(x^{[l(r-\gamma)+k\gamma]/r}) \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

In this result, O can be replaced by o in either hypothesis (i) *or* (ii) *and the conclusion.*

The object of this note is to prove the following theorem which is closely related to Theorem A and has a one-sided hypothesis instead of (i) in Theorem A.

Theorem B. *Let $\varphi(x)$, $\Phi_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, be defined as in Theorem A. Let $1 \leqq \gamma < r$. Then the hypotheses* (i) $\varphi(x) = O_L(x^l)$ *as* $x \to \infty$, (ii) $\Phi_r(x) \sim K x^k$ *as* $x \to \infty$, *together lead to the conclusion*

either CASE (1): $\Phi_\gamma(x) = o(x^{[l(r-\gamma)+k\gamma]/r})$ *when* $k < l + r$,

or CASE (2): $\Phi_\gamma(x) \sim K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+\gamma+1)} x^{k-r+\gamma}$ *when* $k \geqq l + r$,

provided that, in either case, $\min(k, l+r) \geqq r-1$.

An important distinction between Theorems A and B is to be found in the fact that, in CASE (2): $k \geqq l+r$, Theorem A becomes trivial. For, in that case, hypothesis (i) of Theorem A, by itself, ensures

$$\Phi_\gamma(x) = O(x^{l+\gamma}) = \begin{cases} \text{either} & O(x^{[l(r-\gamma)+k\gamma]/r}), \\ \text{or} & o(x^{[l(r-\gamma)+k\gamma]/r}), \end{cases}$$

according as either $k = l+r$ or $k > l+r$.

It is when we pass from Theorem A to Theorem B that CASE (2) assumes a significance. A consideration of CASE (2) in the latter

[1]) Numbers in square brackets [] refer to the literature cited at the end.

theorem, with $\gamma = 1$ and $r = 2, 3, \ldots$, leads at once to a result of Doetsch [2] given as CASE (2) of Theorem C at the end.

2. The proof of Theorem B requires the following lemmas.

Lemma 1. *Let* $\varphi(x)$, $\Phi_\alpha(x)$, $0 < \alpha < 1$, *be defined as in Theorem* A. *Let* $W(x)$ *be a positive, monotonic inreasing function for* $x \geqq 0$. *Then*

$$\Phi_\alpha(x) = o[W(x)], \qquad x \to \infty,$$

implies

$$\int_0^\eta (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt = o[W(x)]$$

uniformly with respect to η *in* $(0, x)$.

This is a result of Riesz [7, § 8].

Lemma 2. *Let* $\psi(x)$ *be a function of bounded variation in every finite interval of* $x \geqq 0$ *and let* $\Psi_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, *be related to* $\psi(x)$ *exactly as* $\Phi_\alpha(x)$ *to* $\varphi(x)$. *Then*

$$\psi(x) > -L x^\lambda, \quad x > 0, \quad L > 0,$$

implies that, for $0 < y \leqq t \leqq x$,

$$\Psi_1(x) - \Psi_1(t) \geqq -L(x-y)\,\xi^\lambda, \qquad y < \xi < x, \tag{1}$$

where ξ *is a function of* x *and* y.

Proof.

$$\Psi_1(x) - \Psi_1(t) = \int_t^x \psi(u)\, du \geqq -L \int_t^x u^\lambda\, du, \qquad 0 < t \leqq x.$$

Hence, for $\lambda \neq -1$,

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) - \Psi_1(t) &\geqq -L\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + L\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \\ &\geqq -L\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + L\frac{y^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad 0 < y \leqq t \leqq x. \end{aligned} \tag{2}$$

The passage to (2) from the previous step is justified since

$$t^{\lambda+1} \geqq \text{ or } \leqq y^{\lambda+1} \text{ according as } \lambda + 1 > 0 \text{ or } < 0,$$

and therefore, whether $\lambda + 1 > 0$ or < 0,

$$\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \geqq \frac{y^{\lambda+1}}{\lambda+1}.$$

Since (1) follows immediately from (2), the proof is complete for the case $\lambda \neq -1$. When $\lambda = -1$ an obvious modification is needed in (2), but this modification leads to (1) as before.

Lemma 3. *For any function* $F(x)$ *of* x, *and* $h > 0$, *write*

$$\Delta_{-h}^n F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(x - \nu h), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\Delta_h^n F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(x + \overline{n-\nu}\, h) \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Then

$$\int_{x-h}^{x} F(x-t)\, \Delta_{-h}^{n} G(t)\, dt = \Delta_{-h}^{n} \int_{x-h}^{x} F(x-t)\, G(t)\, dt, \tag{3}$$

$$\int_{x}^{x+h} F(x+h-t)\, \Delta_{h}^{n} G(t)\, dt = \Delta_{h}^{n} \int_{x}^{x+h} F(x+h-t)\, G(t)\, dt, \tag{3a}$$

provided that $F(t)$, $G(t)$ *are integrable for all* t *in question.*

This lemma and the next can be easily proved by induction.

Lemma 4. *If* $\psi(x)$, $\Psi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *are defined as in Lemma* 2, *then*

$$\Delta_{-h}^{n} \Psi_{n+1}(x) = \int_{x-h}^{x} dt_1 \int_{t_1-h}^{t_1} dt_2 \int_{t_2-h}^{t_2} \cdots \int_{t_{n-1}-h}^{t_{n-1}} \Psi_1(t)\, dt, \tag{4}$$

$$\Delta_{h}^{n} \Psi_{n+1}(x) = \int_{x}^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} dt_2 \int_{t_2}^{t_2+h} \cdots \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+h} \Psi_1(t)\, dt. \tag{4a}$$

3. *Proof of Theorem B for non-integral* r.

The following proof is modelled on the reasoning employed by Mixakshisundaram and Rajagopal elsewhere [4, p. 250, foot-note] and based on a technique of Bosanquet [1].

Let p be the greatest integer less than $r-1$. (4) gives, when $n = p$,

$$h^r \Psi_1(\omega) = \Delta_{-h}^{p} \Psi_{p+1}(x) + \int_{x-h}^{x} dt_1 \int_{t_1-h}^{t_1} \cdots \int_{t_{p-1}-h}^{t_{p-1}} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\}\, dt. \tag{5}$$

Multiply both sides of (5) by $(\omega - x)^{r-p-2}$ and integrate with respect to x from $\omega - h$ to ω. Then

$$\frac{h^{r-1}\, \Psi_1(\omega)}{r-p-1} = \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2}\, \Delta_{-h}^{p} \Psi_{p+1}(x)\, dx + \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2}\, dx \int_{x-h}^{x} dt_1 \int_{t_1-h}^{t_1} \cdots \int_{t_{p-1}-h}^{t_{p-1}} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\}\, dt, \tag{6}$$

where

$$\begin{aligned} \omega - (p+1)h \leqq x - ph \leqq t_1 - (p-1)h \leqq \cdots \leqq t_{p-1} - h \\ \leqq t \leqq t_{p-1} \leqq \cdots \leqq t_1 \leqq x \leqq \omega. \end{aligned} \tag{7}$$

We shall now choose $\psi(x)$ and h. Given ε and μ such that $0 < (p+1)\varepsilon < 1$ and $0 < \mu \leqq 1$, we can choose $h = \varepsilon\, \omega^{\mu}$ ensuring that

$$0 < \omega - (p+1)h \equiv \omega - (p+1)\varepsilon\, \omega^{\mu} \to \infty, \qquad 1 < \omega \to \infty. \tag{8}$$

Let

$$\psi(x) = \varphi(x) - K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+1)} x^{k-r}, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Then, by hypothesis (ii),

$$\Psi_r(x) \equiv \Phi_r(x) - K x^k = o(x^k), \qquad x \to \infty,$$

i. e.

$$\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-t)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(t)\, dt = o(x^k), \qquad x \to \infty.$$

Hence, by Lemma 1 with $\alpha = r-p-1$, $\varphi(x) = \Psi_{p+1}(x)$, $W(x) = x^k$,

$$\left| \int_0^\eta (x-t)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(t)\, dt \right| < \varepsilon^r x^k \text{ for } \eta \text{ in } (0, x),\ x > x_1. \tag{10}$$

Now (9) and hypothesis (i) show that, for all large x,

$$\psi(x) > -M x^l - K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+1)} x^{k-r}$$

where M is a positive constant. Hence there is a positive constant L such that

$$\psi(x) > \left\{ \begin{array}{ll} -L x^l & \text{in CASE (1): } l > k-r \\ -L x^{k-r} & \text{in CASE (2): } l \leqq k-r \end{array} \right\} x > x_2. \tag{11}$$

Let $0 < \omega - (p+1)h \leqq t \leqq \omega$ as in (7), h being chosen as in (8). Then, in consequence of (8), we can find x_3 so that

$$\omega \geqq t \geqq \omega - (p+1)h > x_2 > 0 \qquad \text{for } \omega > x_3.$$

Further, from (11) and Lemma 2 we deduce that, for $\omega > x_3$,

$$\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t) \geqq \left\{ \begin{array}{ll} -L(p+1)h\,\xi^l & \text{in CASE (1),} \\ -L(p+1)h\,\xi^{k-r} & \text{in CASE (2),} \end{array} \right\} \tag{12}$$

where $\omega - (p+1)h < \xi < \omega$ and ξ is a function of ω alone since h is so. Use (3) and (12) in the first and second terms respectively on the right side of (6). Then, for $\omega > x_3$,

$$\frac{h^{r-1}\Psi_1(\omega)}{r-p-1} \geqq \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{-h}^p \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x)\, dx \\ \qquad - L(p+1)h^{p+1}\xi^l \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} dx \text{ in CASE (1)} \\ \Delta_{-h}^p \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x)\, dx \\ \qquad - L(p+1)h^{p+1}\xi^{k-r} \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} dx \text{ in CASE (2)} \end{array} \right\}. \tag{13}$$

The first term on the right side of (13) is

$$\Delta_{-h}^{p} \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x)\, dx$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu} \binom{p}{\nu} \int_{\omega-(\nu+1)h}^{\omega-\nu h} (\omega - \nu h - x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x)\, dx$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu} \binom{p}{\nu} \left[\int_{0}^{\omega-\nu h} - \int_{0}^{\omega-(\nu+1)h} \right].$$

Consequently, by (10),

$$\left| \Delta_{-h}^{p} \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x)\, dx \right| < \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} 2\varepsilon^{r} \omega^{k} = 2^{p+1} \varepsilon^{r} \omega^{k}, \quad \omega > x_4. \tag{14}$$

When $\omega > \max(x_4, x_3)$, we can use (14) in (13) and write (13) in the form

$$\Psi_1(\omega) \geqq \begin{cases} -2^{p+1}(r-p-1)\,\varepsilon^{r} \dfrac{\omega^{k}}{h^{r-1}} - L(p+1)\,h\,\xi^{l} & \text{in CASE (1)} \\ -2^{p+1}(r-p-1)\,\varepsilon^{r} \dfrac{\omega^{k}}{h^{r-1}} - L(p+1)\,h\,\xi^{k-r} & \text{in CASE (2)} \end{cases}. \tag{15}$$

In (15) take $h = \varepsilon\,\omega^{\mu}$ with $\mu = (k-l)/r$ in CASE (1) and $\mu = 1$ in CASE (2). Then divide both sides by $\omega^{[l(r-1)+k]/r}$ in CASE (1) and ω^{k-r+1} in CASE (2). The result will be, for $\omega > \max(x_4, x_3)$,

$$\begin{cases} \dfrac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \geqq -2^{p+1}(r-p-1)\,\varepsilon - L(p+1)\left(\dfrac{\xi}{\omega}\right)^{l} \varepsilon & \text{in CASE (1)} \\ \dfrac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \geqq -2^{p+1}(r-p-1)\,\varepsilon - L(p+1)\left(\dfrac{\xi}{\omega}\right)^{k-r} \varepsilon & \text{in CASE (2)} \end{cases}. \tag{16}$$

In both CASES (1) and (2), $1-(p+1)\,\varepsilon < \xi/\omega < 1$ for $\omega > 1$. Since ε can be chosen arbitrarily small, (16) gives

$$\begin{cases} \liminf\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \geqq 0 & \text{in CASE (1)} \\ \liminf\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \geqq 0 & \text{in CASE (2)} \end{cases}. \tag{17}$$

As a result of the definition of ψ in (9), (17) leads at once to

$$\begin{cases} \liminf\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \geqq 0 & \text{in CASE (1)} \\ \liminf\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \geqq K\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+2)} & \text{in CASE (2)} \end{cases}. \tag{18}$$

To establish the conclusion of Theorem B for $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma = 1$, it is enough to supplement (18) by

$$(19)\qquad \begin{cases} \limsup\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \leqq 0 & \text{in CASE (1)} \\ \limsup\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \leqq K\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+2)} & \text{in CASE (2)} \end{cases}$$

(19) is proved by taking as our starting point (4a) rewritten in the form

$$(5\,\text{a})\qquad h^p\,\Psi_1(\omega) = \Delta_h^p\,\Psi_{p+1}(x) + \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} \cdots \int_{t_{p-1}}^{t_{p-1}+h} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\}\,dt$$

where p is the greatest integer less than $r-1$. The two sides of (5a) are then multiplied by $(\omega+h-x)^{r-p-2}$ and integrated with respect to x from ω to $\omega+h$, with the result that

$$(6\,\text{a})\qquad \frac{h^{r-1}\,\Psi_1(\omega)}{r-p-1} = \int_\omega^{\omega+h} (\omega+h-x)^{r-p-2}\,\Delta_h^p\,\Psi_{p+1}(x)\,dx$$
$$+ \int_\omega^{\omega+h} (\omega+h-x)^{r-p-2}\,dx \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} \cdots \int_{t_{-1}}^{t_{p-1}+h} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\}\,dt.$$

(19) is obtained by reasoning with (6a) as with (6), but using (3a) where we formerly used (3). This line of reasoning is omitted since it is well indicated by the arguments which appear above and elsewhere [5].

To complete the proof of Theorem B, we have to indicate the transition from $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma = 1$, to $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma > 1$.

In CASE (1), the transition is effected by an application of Theorem A in which we replace hypothesis (i) of that theorem by

$$\Phi_1(x) = o(x^{[l(r-1)+k]/r}),$$

and hypothesis (ii) by

$$\Phi_r(x) = O(x^k).$$

The replacement is justified since, on account of our assumption $l + r > k \geqq r-1$, we have

$$[l(r-1)+k]/r > 0, \qquad k > 0.$$

In CASE (2), we prove the conclusion of Theorem B for $\Phi_\gamma(x)$, $1 < \gamma < r$, by means of the formula

$$\Phi_\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)} \int_0^x (x-t)^{\gamma-2}\,\Phi_1(t)\,dt.$$

In the integrand of the last integral

$$\Phi_1(x) \sim K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+2)} x^{k-r+1}, \qquad x \to \infty,$$

and therefore by a lemma of HARDY and RIESZ [3, p. 27, Lemma 5 with foot-note],

$$\Phi_\gamma(x) \sim K \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\overline{\gamma-2}+1)\,\Gamma(\overline{k-r+1}+1)}{\Gamma(\gamma-1)\,\Gamma(k-r+2)\,\Gamma(\overline{\gamma-2}+\overline{k-r+1}+2)} x^{\overline{\gamma-2}+\overline{k-r+1}+1} \tag{20}$$

since $k \geqq l+r \geqq r-1$ or $k-r+1 \geqq 0$ and $\gamma-2 > -1$. (20) is the conclusion regarding $\Phi_\gamma(x)$ which we wished to prove.

4. *Proof of Theorem B for integral r.*

When r is a positive integer ($\geqq 2$), we can base our proof of Theorem B for $\Phi_1(x)$ on the identities (5) and (5 a), with $p = r-1$, $x = \omega$, avoiding (6) and (6 a). This means that, we can dispense with the appeal to Lemma 1 and the condition $k > 0$ which is introduced in the first instance to justify the appeal. The condition $k > 0$ is, however, required in supplying the proof of the required result for $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma > 1$.

In the case $r = 2, 3, \ldots$, we can set $\Phi_r(x) = f(x)$ and restate as under Theorem B for $\Phi_1(x)$.

Theorem C. *If, for $x \geqq 0$, $f(x)$ is an r^{th} indefinite integral of a function $f^{(r)}(x)$ and if* (i) $f^{(r)}(x) = O_L(x^l)$ *as* $x \to \infty$, (ii) $f(x) \sim K x^k$ *as* $x \to \infty$, *then*

either CASE (1): $f^{(r-1)}(x) = o(x^{[l(r-1)+k]/r})$ *when* $k < l+r$,

or CASE (2): $f^{(r-1)}(x) \sim K k(k-1)\ldots(k-r+2)x^{k-r+1}$ *when* $k \geqq l+r$.

CASE (2) of Theorem C was proved by OBRECHKOFF [6] for $k = l+r$ and earlier by DOETSCH [2, p. 174, Theorem II] for $k = l+r \geqq r$. When $k = l+2$, $r = 2$ in CASE (2), we have a classical theorem of HARDY and LITTLEWOOD [8, p. 194, Corollary 4. 4 *a*].

Literature.

BOSANQUET, L. S.

[1] Note on convexity theorems, Journal London Math. Soc. **18** (1943), 239—248.

DOETSCH, G.

[2] Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen, Math. Zeitschr. **11** (1921), 161—179.

HARDY, G. H. and RIESZ, M.
[3] The general theory of Dirichlet's series, Cambridge Tract, No. **18** (1915).

MINAKSHISUNDARAM, S. and RAJAGOPAL, C. T.
[4] An extension of a Tauberian theorem of L. J. Mordell, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **50** (1945), 242—255.

MINAKSHISUNDARAM, S. and RAJAGOPAL, C. T.
[5] On a Tauberian theorem of K. Ananda Rau, Quart. J. of Math. (Oxford series) **17** (1946), 153—161.

OBRECHKOFF, N.
[6] Sur une formule pour les différences divisées et sur les limites de fonctions et de leurs dérivées, Comptes Rendus Acad. Bulgare Sci. **2** (1949), No. 1, 5—8.

RIESZ, M.
[7] Sur un théorème de la moyenne et ses applications, Acta Lit. Sci. Reg. Univ. Hungaricae (Sectio Sci. Math.) **1** (1923), 114—126.

WIDDER, D. V.
[8] The Laplace transform (Princeton, 1941).

(Eingegangen am 18. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 92—108 (1951).

Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen.

Von

W. Jurkat in Tübingen und **A. Peyerimhoff** in Gießen.

In seiner Arbeit "Sur un théorème de la moyenne et ses applications" hat Herr M. Riesz [1]) einen sehr anwendungsfähigen Mittelwertsatz bewiesen, auf dem viele Sätze in der Theorie der Rieszschen Verfahren und der Dirichlet-Reihen beruhen [2]). Später sind noch verschiedentlich Sätze ähnlicher Art aufgestellt worden [3]). In dieser Arbeit wird nun der Versuch unternommen, alle diese Mittelwertsätze aus einem einheitlichen Prinzip abzuleiten. Dies geschieht in § 1 und 2, wo auf Grund eines bestimmten Zusammenhanges zwischen den „Zeilen" einer Matrix- oder Integraltransformation der Mittelwertsatz gewonnen wird. Dieser Zusammenhang ist in allen bisher bekannten Fällen erfüllt (§ 3) und darüber hinaus ist eine neue Klasse von Matrixverfahren gewonnen, die sich durch viele angenehme Eigenschaften auszeichnet: Zum Beispiel läßt sich in einfacher Weise die genaue Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen angeben (§ 4); weiter lassen sich für diese Verfahren manche Fragen über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren vollständig beantworten, unter denen etwa die Verallgemeinerung des bekannten Hardy-Bohrschen Satzes [4]) für die Cesàroschen Mittel hervorgehoben sei (§ 6, Satz 11); schließlich seien die Anwendungen auf die stetigen und unstetigen Rieszschen Mittel genannt (§ 7). Auf weitere Anwendungen wollen wir später zurückkommen.

1. Ein Mittelwertsatz für Matrixtransformationen.

Wir betrachten Matrixtransformationen der Form

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu , \tag{1}$$

wo der Folge $\{s_n\}$ mittels der Dreiecksmatrix $(a_{n\nu})$ die Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet wird.

[1]) Riesz [12].
[2]) Vgl. Hardy-Riesz [5].
[3]) Jacob [6], Bosanquet [2], Jurkat [8].
[4]) Vgl. die bei Hardy [4] auf S. 146 genannte Literatur.

Satz 1. *Besitzt die Matrix* $(a_{n\nu})$ *die Eigenschaften*

$$(M_1) \qquad a_{n\nu} \neq 0, \quad 0 \leqq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leqq K \qquad (0 \leqq \nu \leqq n \leqq m)$$

und

$$(M_2) \qquad \frac{a_{m,\nu-1}}{a_{n,\nu-1}} \geqq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n \leqq m),$$

so gilt für jedes $n \leqq m$ *die Abschätzung*

$$(M) \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n'0}} |\sigma_{n'}| \leqq K |\sigma_{n'}| \qquad (0 \leqq n' \leqq n).$$

Durch die Ungleichung (M) wird also die Möglichkeit gegeben, sozusagen ein „Stück" der Transformation durch die ganze Transformation abzuschätzen, und diese Möglichkeit wird zu zahlreichen Anwendungen Anlaß geben.

Der Beweis beruht auf einer wiederholten Anwendung des Abelschen Lemmas. Wir schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} a_{n\nu} s_\nu$$

und erhalten wegen (M_2) sofort

$$(2) \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n0}} \left| \sum_{\nu=0}^{n_1} a_{n\nu} s_\nu \right| \qquad (0 \leqq n_1 \leqq n).$$

Verfahren wir jetzt mit der rechten Seite von (2) so wie vorher mit der linken und iterieren diesen Prozeß, so entstehen die Ungleichungen

$$(3) \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n_k 0}} \left| \sum_{\nu=0}^{n_{k+1}} a_{n_k \nu} s_\nu \right| \qquad (n \geqq n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots \geqq 0).$$

Wegen der Beziehungen zwischen den n_k muß mindestens für einen Index k die Gleichheit $n_k = n_{k+1}$ bestehen, und für diesen gemeinsamen Wert $n' = n_k$ gilt die behauptete Abschätzung

$$(M) \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n'0}} \left| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \right|.$$

Die hier zum Beweis von Satz 1 verwandte Methode wurde schon von L. S. Bosanquet und W. Jurkat benutzt, um für die Cesàroschen und die „unstetigen" Rieszschen Verfahren Mittelwertsätze zu erhalten [5].

2. Ein Mittelwertsatz für Integraltransformationen.

Wir wenden uns jetzt den Integraltransformationen zu, wo das erste Beispiel eines Mittelwertsatzes von M. Riesz [6] gefunden wurde.

[5] Bosanquet [3], der erste Beweis bei Bosanquet [2] verläuft anders; Jurkat [8]; vgl. auch § 3.

[6] Riesz [11], [12].

Analog zu (1) ordnen wir der Funktion $s(t)$ mittels der Dreiecksmatrix $(a(x,t))$ die Funktion $\sigma(x)$ zu:

$$\sigma(x) = \int_0^x a(x,t)\,s(t)\,dt. \tag{4}$$

Dabei sollen nur solche Transformationen in Betracht gezogen werden, welche die Bedingungen (I) erfüllen:
(I_0) $s(t)$ sei für alle $x \geqq 0$ im Intervall $(0, x)$ meßbar und beschränkt;
(I_1) $a(x,t)$ sei für alle $x \geqq 0$ L-integrierbar über das Intervall $0 \leqq t \leqq x$;

$$(I_2) \qquad \int_y^x |a(x,t)|\,dt \to 0 \qquad (x \to y+0);$$

$$(I_3) \qquad \int_0^y |a(x,t) - a(y,t)|\,dt \to 0 \qquad (x \to y+0).$$

Die Bedingungen (I) sichern die „Stetigkeit" der Integraltransformation (4) in dem folgenden Sinne:

$$\int_0^y a(x,t)\,s(t)\,dt \to \int_0^{y_0} a(x_0, t)\,s(t)\,dt \tag{5}$$

für

$$x \to x_0 + 0, \quad y \to y_0 \qquad (0 \leqq y \leqq x).$$

Denn aus (I_2) und (I_3) folgt

$$\int_0^x |a(x,t) - a(x_0,t)|\,dt \to 0 \qquad (x \to x_0 + 0),$$

wobei $a(x_0, t) = 0$ für $t > x_0$ sein soll. Dann strebt aber auch

$$\int_0^y |a(x,t) - a(x_0 t)|\,s(t)\,dt \to 0,$$

und dies ist nur eine andere Form von (5).

Satz 2. *Besitzt die Matrix* $(a(x,t))$ *neben* (I) *noch die Eigenschaften*

$$(M_1') \qquad a(x,t) \neq 0 \text{ } \textit{und endlich}, \quad 0 \leqq \frac{a(x,t)}{a(y,t)} \leqq K \qquad (0 \leqq t < y \leqq x)$$

und

$$(M_2') \qquad \frac{a(x,t)}{a(y,t)} \textit{ fällt monoton, wenn } t \textit{ wächst} \qquad (0 \leqq t < y \leqq x),$$

so gilt für jedes $y \leqq x$ *die Abschätzung*

$$(M') \qquad \left| \int_0^y a(x,t)\,s(t)\,dt \right| \leqq K\,|\sigma(y')| \qquad (0 \leqq y' \leqq y).$$

Dieser Satz entspricht dem Satz 1 für Matrixtransformationen vollkommen, wenn man von den zusätzlichen Bedingungen (I) absieht. Auch der Beweis läßt sich ganz genau so durchführen, wobei an die Stelle des Abelschen Lemmas der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung tritt: Statt (3) erhalten wir

$$\left|\int_0^y a(x,t)\,s(t)\,dt\right| \leqq \frac{a(x,0)}{a(y_k,0)}\left|\int_0^{y_{k+1}} a(y_k,t)\,s(t)\,dt\right| \tag{6}$$

$$(y \geqq y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq 0).$$

Nun streben die y_k offenbar monoton fallend gegen eine Zahl y' und für diese gilt wegen (5) die behauptete Abschätzung (M'). Hätten wir noch

$$a(y,0) \quad \text{nach rechts stetig in } y \tag{I_4}$$

vorausgesetzt, so hätte sich genauer

$$\left|\int_0^y a(x,t)\,s(t)\,dt\right| \leqq \frac{a(x,0)}{a(y',0)}\,|\sigma(y')| \qquad (0 \leqq y' \leqq y) \tag{M''}$$

ergeben.

Bemerkung zu den Voraussetzungen: (I_3) und (I_4) können natürlich durch die beide enthaltende Bedingung

$$a(x,t) \to a(y,t), \quad \text{wenn } x \to y+0 \quad (0 \leqq t < y), \tag{I_5}$$

ersetzt werden. (Denn wir können wegen (M_1') den bekannten Satz von Lebesgue über die Vertauschung von Integration und Grenzübergang anwenden.)

3. Beispiele für Mittelwertsätze.

3.1. Der Mittelwertsatz von M. Riesz[7]:

Ist $s(t)$ meßbar und beschränkt, $0 < \varkappa \leqq 1$, so gilt

$$\left|\varkappa\int_0^y (x-t)^{\varkappa-1}\,s(t)\,dt\right| \leqq \left|\varkappa\int_0^{y'} (y'-t)^{\varkappa-1}\,s(t)\,dt\right| \quad (0 \leqq y' \leqq y \leqq x). \tag{7}$$

Man sieht sofort, daß die Bedingungen von Satz 2 erfüllt sind. Allerdings müssen wir zugeben, daß (7) sogar für alle L-integrierbaren Funktionen $s(t)$ und nicht nur für beschränkte $s(t)$ richtig ist, was Satz 2 nicht liefert.

3.2. Dem Mittelwertsatz von M. Riesz hat W. Jurkat einen Mittelwertsatz für die „unstetigen" Rieszschen Verfahren an die Seite gestellt. Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (bzw. Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$) heißt summierbar (bzw. limitierbar) zum Werte s durch das Verfahren der „stetigen" Rieszschen

[7] Vgl. Fußnote [6]. Weitere Beweise: Hardy-Riesz [5], S. 28. Verblunsky [13].

Mittel $R^\varkappa(\lambda)$, wenn

$$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} = \frac{1}{\omega^\varkappa} \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa a_\nu \to s \qquad (\omega \to \infty) \tag{8}$$

gilt, dabei soll $\varkappa \geqq 0$ und λ_n eine monoton gegen ∞ wachsende Zahlenfolge sein:

$$\Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \quad 0 \leqq \lambda_n \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{9}$$

Die „unstetigen" Rieszschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ sind dadurch definiert, daß ω in (8) nicht mehr stetig, sondern nur noch durch die Werte λ_n gegen ∞ streben soll.

Wir schreiben $A(\tau) = A^0(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} a_\nu$ und haben dann

$$A^\varkappa(\omega) = \varkappa \int_0^\omega (\omega - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau \qquad (\varkappa > 0). \tag{10}$$

Die Gleichung (10) zeigt die Bedeutung des Rieszschen Mittelwertsatzes für die stetigen Mittel $R^\varkappa(\lambda)$. Die unstetigen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ bilden eine Matrixtransformation, die wir der Einfachheit halber auch in Integralform schreiben wollen. Der hier durch Satz 1 gegebene Mittelwertsatz (vgl. Fußnote [5])) lautet dann:

Ist $\lambda_n \leqq \lambda_m$, $0 < \varkappa \leqq 1$, *so gilt*

$$\left| \varkappa \int_0^{\lambda_m} (\lambda_m - \tau)^{\varkappa-1} A(\tau)\, d\tau \right| \leqq |A^\varkappa(\lambda_{n'})| \qquad (0 \leqq n' \leqq n). \tag{11}$$

Dabei ist mit den allgemeinen Bezeichnungen

$$a_{m\nu} = \varkappa \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} (\lambda_{m+1} - \tau)^{\varkappa-1}\, d\tau$$

und nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir

$$\frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} = \frac{(\lambda_{m+1} - \tau_\nu)^{\varkappa-1}}{(\lambda_{n+1} - \tau_\nu)^{\varkappa-1}} \quad \text{mit} \quad \lambda_\nu < \tau_\nu < \lambda_{\nu+1},$$

so daß die Bedingungen (M_1) und (M_2) für die unstetigen Mittel auf die entsprechenden Bedingungen (M_1') und (M_2') für die stetigen zurückgeführt sind. Dieser Zusammenhang zwischen Matrix- und Integraltransformationen besteht allgemein [8]), worauf wir jedoch nicht näher eingehen können.

3.3. Für die Cesàroschen Mittel hat L. S. Bosanquet [9]) folgenden Mittelwertsatz aufgestellt:

Ist $n \leqq m$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, *so gilt*

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m-\nu+\varkappa-1}{m-\nu} s_\nu \right| \leqq \left| \sum_{\nu=0}^{n'} \binom{n'-\nu+\varkappa-1}{n'-\nu} s_\nu \right| \qquad (0 \leqq n' \leqq n). \tag{12}$$

[8]) Wenn bei festem x fast überall $a(x,t) > 0$ ist.

[9]) Vgl. Fußnote [5]).

Man erkennt wieder unmittelbar, daß die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Die Ungleichung (12) ist ein Spezialfall einer allgemeineren Ungleichung für Nörlundsche Verfahren:

Sind für alle μ und $\nu \geqq 0$ die Bedingungen

$$p_\nu > 0, \quad \frac{p_{\nu+\mu}}{p_\nu} \text{ wächst monoton mit } \nu, \quad \frac{p_{\nu+\mu}}{p_\nu} \leqq K$$

erfüllt, so gilt

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} p_{m-\nu} s_\nu \right| \leqq \frac{p_m}{p_{n'}} \left| \sum_{\nu=0}^{n'} p_{n'-\nu} s_\nu \right| \qquad (0 \leqq n' \leqq n \leqq m). \tag{13}$$

3. 4. Zu dem Mittelwertsatz (7) bei dem Cesàroschen Verfahren für Integrale hat M. Jacob[10]) ein Analogon bei dem Hölderschen Verfahren für Integrale gefunden:

Ist $s(t)$ meßbar und beschränkt, $0 < \varkappa \leqq 1$, so gilt

$$\left| \int_1^y (\log x - \log t)^{\varkappa-1} s(t)\, dt \right| \leqq \left| \int_1^{y'} (\log y' - \log t)^{\varkappa-1} s(t)\, dt \right| \tag{14}$$

$$(1 \leqq y' \leqq y \leqq x).$$

Auch hier übersieht man leicht, daß die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind.

Mit diesen Beispielen meist bekannter Mittelwertsätze wollen wir uns begnügen, obwohl es leicht wäre, noch manchen weiteren hinzuzufügen.

4. Über die Größenordnung limitierbarer Folgen.

Wir gehen jetzt zu Anwendungen der Mittelwertsätze über, wobei wir der Einfachheit wegen Matrixtransformationen bevorzugen.

Zunächst führen wir einen Satz an, der Aufschluß darüber gibt, in welcher Weise die Transformation (1) gegen Null konvergieren kann.

Satz 3. *Erfüllt die Matrix $(a_{n\nu})$ neben (M_1) und (M_2) noch die Spaltenbedingung*

$$a_{n\nu} \to 0 \qquad (n \to \infty, \ \nu \text{ fest}), \tag{Sp_0}$$

so folgt aus $\sigma_n = o(1)$ für $n \to \infty$, daß auch

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu = o(1) \qquad \text{für } m \to \infty \tag{15}$$

ist, und zwar gleichmäßig für alle $0 \leqq n \leqq m$.

Man kann diesen Sachverhalt auch kurz so aussprechen:

Mit der Transformation selbst strebt auch jedes ihrer Teilstücke gegen Null. Den Beweis entnehmen wir unmittelbar der Ungleichung

[10]) Jacob [6].

(M), da für große n' das Glied $K|\sigma_{n'}|$ klein wird und für beschränkte n' das Glied $\frac{a_{m0}}{a_{n'0}}|\sigma_{n'}| \to 0$ strebt für $m \to \infty$.

Satz 3 ist die Grundlage zahlreicher Anwendungen, z. B. enthält er unmittelbar eine Aussage über die Größenordnung limitierbarer Folgen.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3, also* (M_1), (M_2), (Sp_0) *folgt aus* $\sigma_n = o(1)$

$$s_n = o(1)\frac{1}{a_{nn}} \qquad (n \to \infty). \tag{16}$$

Denn nach (15) strebt ja $\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} s_\nu \to 0$, und folglich gilt auch für den „Rest" der Transformation $a_{nn} s_n = o(1)$.

Zusatz. Ist die Transformation permanent, so folgt natürlich aus $\sigma_n = s + o(1)$, daß $s_n = s + o(1)\frac{1}{a_{nn}}$ ist. Ist außerdem $\frac{1}{a_{nn}} = O(1)$, so ist die Transformation konvergenzgleich [11]).

Ergänzend zu Satz 4 zeigen wir, daß sich die Bedingung (16) nicht verschärfen läßt, so daß wir also in $\frac{1}{a_{nn}}$ die „genaue Größenbeschränkung" der limitierbaren Folgen gefunden haben.

Satz 5. *Die Matrix* $(a_{n\nu})$ *erfülle die Bedingung* $a_{nn} \neq 0$ *und* η_n *sei eine positive, unbeschränkte Zahlenfolge. Es gibt dann eine Folge, die den Forderungen*

$$\sigma_n = o(1) \qquad (n \to \infty) \tag{17}$$

und

$$s_n \neq o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{1}{a_{nn}} \qquad (n \to \infty) \tag{18}$$

genügt.

Beim Beweise benutzen wir die Umkehrtransformation

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu}\,\sigma_\nu, \quad a'_{nn} = \frac{1}{a_{nn}}.$$

Wäre für alle Folgen der Form (17) die Bedingung

$$s_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\frac{1}{a_{nn}} = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)a'_{nn} = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right)\sum_{\nu=0}^{n}|a'_{n\nu}| \tag{19}$$

erfüllt, so wäre die Transformation

$$\eta_n \frac{\sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu}\sigma_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n}|a'_{n\nu}|} = \sum_{\nu=0}^{n} d_{n\nu}\,\sigma_\nu \tag{20}$$

[11]) Vgl. Hardy-Riesz [5], theorem 36.

nulltreu und müßte folglich die Bedingung

$$\sum_{\nu=0}^{n} |d_{n\nu}| = O(1) \tag{21}$$

erfüllen, was aber nicht der Fall ist. Infolgedessen gibt es eine Nullfolge σ_ν, für die (18) gilt, q. e. d.

Als Beispiel können wir die unstetigen Rieszschen Verfahren $R_\lambda^\varkappa$ heranziehen, die für $0 < \varkappa \leqq 1$ unsere Voraussetzungen erfüllen und für diese $\varkappa$ mit den stetigen Verfahren $R^\varkappa(\lambda)$ äquivalent sind [12]). Satz 4 und 5 besagt dann, daß hier die genaue Größenordnung der limitierbaren Folgen durch

$$s_n = o(1)\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)^\varkappa \tag{22}$$

gegeben wird. Dieses Ergebnis ist bekannt, und auch der Beweis von Satz 4 ist für diesen Spezialfall nicht neu [13]).

Wir führen noch eine leichte Verallgemeinerung von Satz 4 an, deren Beweis keinerlei Schwierigkeiten bietet.

Satz 6. *Die Matrix* $(a_{n\nu})$ *erfülle die Bedingungen* (M_1), (M_2), (Sp_0) *und* η_n *sei eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge. Dann folgt aus*

$$\sigma_n = o(\eta_n) \quad bzw. \quad \sigma_n = O(\eta_n) \tag{23}$$

entsprechend

$$s_n = o(\eta_n)\frac{1}{a_{nn}} \quad bzw. \quad s_n = O(\eta_n)\frac{1}{a_{nn}}. \tag{24}$$

5. Mittelwertsätze und schwache Abschnittskonvergenz.

5. 1. In den folgenden §§ wollen wir Probleme über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren bei normalen Matrixverfahren behandeln. Wir beschränken uns dabei wie bisher auf Matrixtransformationen $\mathfrak{A}$, die einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (bzw. Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$) eine Folge $\{\sigma_n\}$ durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} a_\nu \tag{25}$$

mit

$$a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0 \text{ für } \nu > n \quad \text{und} \quad a_{n\nu} = \Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n,\nu+1} \tag{26}$$

zuordnen.

Die Transformation $\mathfrak{A}$ heißt *normal*, wenn die Diagonalglieder

$$a_{nn} = \bar{a}_{nn} \neq 0 \tag{27}$$

sind.

[12]) Vgl. Jurkat [8].

[13]) Vgl. Hardy-Riesz [5], S. 36; Jurkat [7].

Es hat sich gezeigt, daß bei Fragen über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren eine gewisse Eigenschaft des Nullwirkfeldes von $\mathfrak{A}$ — mit $(\mathfrak{A})_0$ bezeichnet[14]) — von besonderer Wichtigkeit ist, nämlich die *schwache Abschnittskonvergenz* (SAK). Wenn $\mathfrak{A}$ permanent und normal ist, so ist in $(\mathfrak{A})_0$ genau dann SAK vorhanden, wenn für jede Folge $\{s_\nu\} \in (\mathfrak{A})_0$ und für alle $m \geqq n$ die Ungleichung

$$\text{(28)} \qquad \text{SAK:} \qquad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leqq K \overline{\inf_{r}} \left|\sum_{\nu=0}^{r} a_{r\nu} s_\nu\right|$$

besteht[15]).

Die Ungleichung (28) gilt jedenfalls dann, wenn $\mathfrak{A}$ die Bedingungen (M_1) und (M_2) für einen Mittelwertsatz erfüllt. Wir wollen sagen, daß $\mathfrak{A}$ die *Eigenschaft* $\mathfrak{M}$ besitzt, wenn statt (28) für jede Folge $\{s_\nu\}$ und alle $m \geqq n$ die Ungleichung

$$\text{(29)} \qquad \mathfrak{M}: \qquad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leqq K \left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu\right| \qquad (0 \leqq n' \leqq n)$$

gilt.

Der Zusammenhang zwischen (28) und (29) wird ausgedrückt durch

Satz 7. *Wenn $\mathfrak{A}$ normal und permanent ist, dann sind die Eigenschaften SAK und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig erfüllt oder nicht erfüllt*[16]).

Beweis. Aus (29) folgt offensichtlich (28). Umgekehrt sei (28) erfüllt. Wir betrachten eine feste Zahl n; $\{s_\nu\}$ sei eine gegebene Zahlenfolge. Wir ändern $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ so ab, daß $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \cdots = 0$ ist. Für diese abgeänderte Zahlenfolge gilt (28), also ist

$$\text{(30)} \qquad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leqq K \overline{\inf_{r}} |\sigma_r| = K \overline{\inf_{r \leqq n}} |\sigma_r|.$$

An den Zahlen $s_0, s_1, \ldots, s_n$; $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ wurde nichts geändert, deshalb ist (30) gerade die zu beweisende Ungleichung (29).

5. 2. Bei den folgenden Untersuchungen werden wir (abgesehen von Anwendungen der Sätze des § 4) von der Eigenschaft $\mathfrak{M}$ und nicht von den konkreten Bedingungen (M_1) und (M_2), aus denen $\mathfrak{M}$ gewonnen werden kann, ausgehen. Die Beweise hängen nämlich von der Gültigkeit des Mittelwertsatzes allein ab. Darüber hinaus bleibt auch Satz 3 richtig, wenn $\mathfrak{A}$ permanent und normal ist und die Eigenschaft $\mathfrak{M}$ besitzt[17]), allerdings ist der Beweis nicht so einfach wie der von uns angegebene. Ohne Änderung der Beweise folgt dann aus Satz 3 die Gültigkeit der Sätze 4 und 6 unter den obigen Voraussetzungen.

Wenn wir auch im folgenden stets mit der Eigenschaft $\mathfrak{M}$ arbeiten, so werden wir bei konkreten Anwendungen i. a. doch auf die Bedingungen (M_1) und (M_2) zurückgreifen.

---

[14]) $(\mathfrak{A})_0$ besteht aus allen Folgen $\{s_\nu\}$, die durch $\mathfrak{A}$ zu Null limitiert werden.

[15]) Vgl. Peyerimhoff [10], Satz 5. 2; Zeller [14].

[16]) Dies ist eine Ergänzung zu Peyerimhoff [10], Satz 5. 2.

[17]) Dies ist der wesentliche Inhalt des Satzes 3. 3 von Zeller [14].

5. 3. Mit Hilfe der SAK konnte A. PEYERIMHOFF[18]) zwei Sätze über Summierbarkeitsfaktoren beweisen, die wir hier zwecks späterer Anwendungen noch einmal formulieren wollen. (Wegen Satz 7 können wir statt SAK stets die Eigenschaft $\mathfrak{M}$ voraussetzen.)

Satz 8. *Das Verfahren $\mathfrak{A}$ sei normal, permanent und besitze die Eigenschaft $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{B}$ sei ein permanentes Limitierungsverfahren.*

Behauptung. *Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ ist genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\mathfrak{A}$-limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, so daß*

$$(F_s) \qquad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \qquad \text{für } \nu = 0, 1, \ldots \text{ gilt.}$$

Satz 9. *Voraussetzungen wie bei Satz 8.*

Behauptung. *Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ ist genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\mathfrak{A}$-summierbaren Reihen $\sum a_\nu$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß*

$$(F_g) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \qquad \text{gilt für } \nu = 0, 1, \ldots$$

und

(G_g) *$\{s_\nu \varepsilon_\nu\}$ $\mathfrak{B}$-limitierbar ist zum Werte Null für alle Folgen $\{s_\nu\} \in (\mathfrak{A})_0$.*

Zusatz. Die Bedingungen (F_s) und (F_g) sind auch noch notwendig für die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit von $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ bzw. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$, wenn $\mathfrak{A}$ normal und permanent ist, aber die Eigenschaft $\mathfrak{M}$ nicht besitzt.

6. Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren.

6. 1. Während Satz 8 einen vollständigen Überblick über die Faktoren ε_ν gibt, ist das bei Satz 9 wegen der Bedingung (G_g) nicht der Fall. Wir wollen in diesem Paragraphen die Bedingung (G_g) in zwei Fällen, nämlich für konvergenzgleiches $\mathfrak{B}$ und für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, durch eine von $\{s_\nu\}$ freie Bedingung ersetzen.

Um diese Dinge bequem formulieren zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Die in Satz 8 vorkommenden Faktoren ε_ν wollen wir kurz als $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_f$-Faktoren und die ε_ν aus Satz 9 als $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_r$-Faktoren bezeichnen; dabei soll f bzw. r an die Folge $\{s_\nu\}$ bzw. Reihe $\sum a_\nu$ erinnern, aus der $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ bzw. $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ gebildet wurde. Handelt es sich um die Konvergenz dieser Reihen, dann wollen wir kurz von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})_f$- bzw. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})_r$-Faktoren sprechen.

---

[18]) PEYERIMHOFF [10], Satz 5. 3, 5. 6 und 3. 6. Der folgende Satz 9 ist eine leichte Verallgemeinerung des Satzes 5. 6.

6. 2. Satz 10. *$\mathfrak{A}$ sei normal, permanent und besitze die Eigenschaft $\mathfrak{M}$.*

Behauptung. *Die ε_ν mit*

$$(F_{10}) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \qquad (\sum |\alpha_n| < +\infty,\ \alpha \text{ beliebig})$$

und

$$(G_{10}) \qquad \varepsilon_n = O(a_{nn})$$

sind genau die $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})_r$-Faktoren.

Beweis. Die genaue Größenbeschränkung der $\mathfrak{A}$-limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ ist nach den Sätzen 4 und 5 gerade $o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)$. Die Bedingung (G_9) läßt sich daher durch (G_{10}) ersetzen.

Zusatz. Wenn $\mathfrak{A}$ nicht konvergenzgleich ist, dann ist $\frac{1}{a_{nn}} \neq O(1)$. In diesem Falle muß in (F_{10}) $\alpha = 0$ sein. Aus (F_{10}) folgt nämlich $\varepsilon_n = \alpha + o(1)$. Andererseits gibt es wegen (G_{10}) eine Teilfolge $\{n_i\}$ der natürlichen Zahlen mit $\varepsilon_{n_i} = o(1)$. Aus diesen Gleichungen folgt aber, daß $\alpha = 0$ sein muß.

6. 3. Satz 11. *$\mathfrak{A}$ sei normal, permanent und besitze die Eigenschaft $\mathfrak{M}$.*

Behauptung. *Die ε_ν mit*

$$(F_{11}) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \qquad (\sum |\alpha_n| < +\infty,\ \alpha \text{ beliebig})$$

sind genau die $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})_r$-Faktoren.

Beweis. Nach Satz 9 haben wir nur zu zeigen, daß die Folge $\{s_\nu \varepsilon_\nu\}$ für alle $\{s_\nu\} \in (\mathfrak{A})_0$ zum Werte 0 $\mathfrak{A}$-limitierbar ist. Es genügt offensichtlich, dies nur für diejenigen $\{\varepsilon_\nu\}$ nachzuweisen, für die $\alpha = 0$ ist.

Die $\mathfrak{A}$-Transformierte der Folge $\{s_\nu \varepsilon_\nu\}$ ist

$$(31) \qquad \tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \alpha_\mu \bar{a}_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu \sum_{\nu=0}^{k} \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_\nu$$

mit

$$(32) \qquad k = \operatorname{Min}(n, \mu).$$

τ_n strebt sicher gegen Null, wenn

$$(33) \qquad \left| \sum_{\nu=0}^{k} \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_\nu \right| \leqq M$$

für alle n und μ gilt; für jedes feste μ gilt nämlich

$$(34) \qquad \sum_{\nu=0}^{k} \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_\nu \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

da $a_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty)$ ist.

Die Bedingung (33) folgt aber aus $\mathfrak{M}$ und der Permanenz von $\mathfrak{A}$:

$$\left|\sum_{\nu=0}^{k} \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_\nu\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{k-1} a_{\mu\nu} \sum_{\varrho=0}^{\nu} a_{n\varrho} s_\varrho + \bar{a}_{\mu k} \sum_{\varrho=0}^{k} a_{n\varrho} s_\varrho\right|$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{k-1} |a_{\mu\nu}| K \overline{\underset{r \leqq k-1}{\text{fin}}} |\sigma_r| + |\bar{a}_{\mu k}| K \overline{\underset{r \leqq k}{\text{fin}}} |\sigma_r| \leqq K'\left(\sum_{\nu=0}^{k-1} |a_{\mu\nu}| + |\bar{a}_{\mu k}|\right) \leqq M.$$

Zusatz. Wenn $\mathfrak{B}$ ein permanentes Verfahren mit $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ ist, dann ist (F_{11}) natürlich auch für die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\mathfrak{A}$-summierbaren Reihen $\sum a_\nu$ notwendig und hinreichend.

7. Stetige und unstetige Rieszsche Mittel.

7. 1. Kürzlich hat W. Jurkat[19]) nachgewiesen, daß die stetigen Rieszschen Mittel $R^\varkappa(\lambda)$ und die unstetigen Rieszschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ für alle $\varkappa$ mit $0 < \varkappa \leqq 1$ äquivalent sind. Die Verfahren $R_\lambda^\varkappa$ besitzen die Eigenschaft $\mathfrak{M}$, wenn $0 < \varkappa \leqq 1$ ist, denn die Bedingungen (M_1) und (M_2) sind für die zugehörigen Matrizen erfüllt (§ **3.** 2). Die Sätze 8, 10 und 11 liefern uns also genaue Bedingungen für Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren bei den Verfahren $R_\lambda^\varkappa$ und damit, wegen $R_\lambda^\varkappa \approx R^\varkappa(\lambda)$, auch bei $R^\varkappa(\lambda)$.

7. 2. Satz 12. *$(R_\lambda^\varkappa, \mathfrak{B})_f$-Faktoren.*

Es sei $0 < \varkappa \leqq 1$ und $\mathfrak{B}$ ein permanentes Limitierungsverfahren. Die ε_ν mit

$$(F_{12}) \qquad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{\Delta_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\varkappa}{\lambda_{n+1}^\varkappa} \qquad (\sum |\alpha_n| < +\infty)$$

sind genau die $(R_\lambda^\varkappa, \mathfrak{B})_f$-Faktoren.

Satz 13. *$(R_\lambda^\varkappa, \mathfrak{C})_r$-Faktoren.*

Es sei $0 < \varkappa \leqq 1$. Die ε_ν mit

$$(F_{13}) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\varkappa}{\lambda_{n+1}^\varkappa} \qquad (\sum |\alpha_n| < +\infty, \ \alpha \text{ beliebig})$$

und

$$(G_{13}) \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n^\varkappa}\right), \quad \Lambda_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

sind genau die $(R_\lambda^\varkappa, \mathfrak{C})_r$-Faktoren. Wenn $\{\Lambda_n\}$ unbeschränkt ist, so ist $\alpha = 0$.

Satz 14. *$(R_\lambda^\varkappa, \mathfrak{B})_r$-Faktoren, $\mathfrak{B} \supseteq R_\lambda^\varkappa$.*

Es sei $0 < \varkappa \leqq 1$ und $\mathfrak{B}$ ein permanentes Limitierungsverfahren mit $\mathfrak{B} \supseteq R_\lambda^\varkappa$. Die ε_ν mit

$$(F_{14}) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\varkappa}{\lambda_{n+1}^\varkappa} \qquad (\sum |\alpha_n| < +\infty, \ \alpha \text{ beliebig})$$

sind genau die $(R_\lambda^\varkappa, \mathfrak{B})_r$-Faktoren.

---

[19]) Jurkat [8].

7. 3. Setzen wir in den Sätzen 12, 13 und 14 $\lambda_n = n$, so erhalten wir wegen $R_n^\varkappa \approx R^\varkappa(n) \approx C_\varkappa$ Sätze für die Cesàroschen Mittel. Da aber die $C_\varkappa$-Verfahren nach § 3. 3 selbst die Eigenschaft $\mathfrak{M}$ besitzen, können wir auch die Sätze 8, 10 und 11 direkt anwenden und kommen so zu etwas anderen, aber natürlich äquivalenten Bedingungen:

Satz 15. *Wenn* $\lambda_n = n$ *und* $0 < \varkappa \leqq 1$ *ist, dann ist* (F_{12}) *mit*

$$(F'_{12}) \qquad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \frac{\binom{n-\nu+\varkappa-1}{n-\nu}}{\binom{n+\varkappa}{n}} \qquad (\sum |\beta_n| < +\infty)$$

gleichwertig.

Satz 16. *Wenn* $\lambda_n = n$ *und* $0 < \varkappa \leqq 1$ *ist, dann ist die Bedingung* $(F_{13}) = (F_{14})$ *mit*

$$(F'_{13}) = (F'_{14}) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \frac{\binom{n-\nu+\varkappa}{n-\nu}}{\binom{n+\varkappa}{n}} \qquad (\sum |\beta_n| < +\infty)$$

gleichwertig.

7. 4. Die Bedingungen (F_{12}), (F'_{12}), ..., (F'_{14}) liefern zwar eine Darstellung aller Faktoren ε_ν, doch wird es für konkret gegebene ε_ν oft schwierig sein, die Möglichkeit einer solchen Darstellung nachzuweisen. In den folgenden Fällen ist aber die Auflösung nach α_n bzw. β_n leicht möglich[20]:

1) *Für* $\varkappa = 1$:

$$(F^*_{12}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} \left| \Delta\left(\frac{\varepsilon_n}{\Delta\lambda_n}\right) \right| < +\infty \quad \textit{und} \quad \varepsilon_n = o(\Delta\lambda_n)\ [21].$$

$$(F^*_{13}) = (F^*_{14}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} \left| \Delta\left(\frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta\lambda_n}\right) \right| < +\infty \quad \textit{und} \quad \frac{\Delta\varepsilon_n}{\Delta\lambda_n} = o(1)\ [22].$$

2) *Für alle* $\varkappa$ *mit* $0 < \varkappa \leqq 1$:

$$(F'^*_{12}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} |\Delta^\varkappa \varepsilon_n| < +\infty \quad \textit{und} \quad \varepsilon_n = o(1)\ [21].$$

$$(F'^*_{13}) = (F'^*_{14}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\varkappa}{n} |\Delta^{\varkappa+1} \varepsilon_n| < +\infty \quad \textit{und} \quad \varepsilon_n = O(1).$$

(F'^*_{14}) stellt also eine genaue Bedingung für $(C_\varkappa, C_\varkappa)_r$-Faktoren dar $(0 < \varkappa \leqq 1)$. Dieser Sachverhalt wird gewöhnlich als Hardy-Bohrscher Satz bezeichnet[23].

---

[20]) Die nach α_n aufgelösten Bedingungen kennzeichnen wir durch Anhängen eines *, also (F^*_{12}) usw.

[21]) Vgl. Peyerimhoff [10], § 7.

[22]) Vgl. Jurkat [7], Satz 1.

[23]) Vgl. hierzu Bosanquet [3] und die dort zitierten Arbeiten; K. Knopp [9]; die bei Hardy [4], S. 146 zitierten Arbeiten und Andersen [1].

7. 5. Von Interesse ist vielleicht noch eine Bemerkung über die Bedingungen, die A. PEYERIMHOFF [24]) an Stelle von (F_{12}) und (F_{13}) erhalten hatte:

$$(\hat{F}_{12}) \qquad \varepsilon_\nu = \Delta_\nu \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega-\lambda_\nu)^\varkappa}{\omega^\varkappa}\, d\,g(\omega) \quad mit \quad \int_0^{\infty} |d\,g(\omega)| < +\infty$$

$$(\hat{F}_{13}) \qquad \varepsilon_\nu = \alpha + \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega-\lambda_\nu)^\varkappa}{\omega^\varkappa}\, d\,g(\omega) \quad mit \quad \int_0^{\infty} |d\,g(\omega)| < +\infty.$$

Da diese Bedingungen mit (F_{12}) und (F_{13}) äquivalent sein müssen, muß es zu jeder Funktion $g(\omega)$ mit $\int_0^{\infty} |d\,g(\omega)| < +\infty$ eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ geben, so daß

$$(35) \qquad \Delta_\nu \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega-\lambda_\nu)^\varkappa}{\omega^\varkappa}\, d\,g(\omega) = \Delta_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\varkappa}{\lambda_{n+1}^\varkappa} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

und

$$(36) \qquad \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega-\lambda_\nu)^\varkappa}{\omega^\varkappa}\, d\,g(\omega) = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\varkappa}{\lambda_{n+1}^\varkappa} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

ist. (Die Umkehrung ist trivial.) Einen direkten Beweis für diese Tatsache haben wir nicht finden können.

Schlußbemerkungen.

Wir haben bisher die RIESZschen Mittel nur für $0 < \varkappa \leqq 1$ betrachtet, wo also der Mittelwertsatz galt und die stetigen Verfahren mit den unstetigen Verfahren äquivalent sind. Für $\varkappa > 1$ herrschen andere Verhältnisse: Man weiß, daß die Äquivalenz $R_\lambda^\varkappa \approx R^\varkappa(\lambda)$ nicht mehr für alle $\varkappa > 1$ besteht; die Bedingungen für Konvergenzfaktoren können bei $R_\lambda^\varkappa$ und $R^\varkappa(\lambda)$ verschieden ausfallen.

Man wird fragen, ob z. B. die vorher erhaltene Bedingung (F_{13}) für $\varkappa > 1$ noch notwendig oder hinreichend bleibt. Diese Frage soll nun in beschränktem Umfang beantwortet werden, nämlich für R_n^2 und $R^2(n)$.

Satz 17. *Die* ε_ν *mit*

$$(F_{17}) \qquad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(n+1-\nu)^2}{(n+1)^2} \qquad (\sum |\alpha_n| < +\infty),$$

$$(G_{17}) \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

und

$$(H_{17}) \qquad \alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sind genau die $(R_n^2, \mathfrak{C})_r$*-Faktoren.*

[24]) PEYERIMHOFF [10], § 9.

Beweis. Die Bedingung (F_{17}) ist nach dem Zusatz zu Satz 9 notwendig. Die genaue Größenbeschränkung der Glieder derjenigen Reihen, die R_n^2-summierbar sind, ist $o(n^3)$. Daraus folgt (G_{17}). Mit den Abkürzungen

$$\sigma_n = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{\nu=0}^{n} (n+1-\nu)^2 a_\nu, \quad S_r^i = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r-\nu+i-1}{r-\nu} a_\nu \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{37}$$

gilt

$$\sum_{\nu=0}^{r} a_\nu \varepsilon_\nu = S_r^1 \varepsilon_{r+1} + S_r^2 \Delta \varepsilon_{r+1} + S_r^3 \Delta^2 \varepsilon_{r+1} + \sum_{\nu=0}^{r} \alpha_\nu \sigma_\nu + \frac{\alpha_{r+1}}{(r+2)^2} S_r^3. \tag{38}$$

Die genaue Größenbeschränkung der Folgen $\{S_n^3\}$ ist $o(n^3)$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 18. *Für $(R^2(n), \mathfrak{C})_r$-Faktoren sind die Bedingungen*

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(n+1)^2} (n+1-\nu)^2 \qquad (\textstyle\sum |\alpha_\nu| < +\infty) \tag{F_{18}}$$

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{G_{18}}$$

hinreichend, aber nicht notwendig.

Beweis. Es ist $R^2(n) \approx C_2$. Die genauen Bedingungen für $(C_2, \mathfrak{C})_r$-Faktoren sind bekanntlich die folgenden:

$$(F) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |\Delta^3 \varepsilon_n| < +\infty \qquad \text{und} \qquad (G) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

a) Hinreichend:

Aus (F_{18}) folgt

$$\Delta^3 \varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{(n+1)^2} + \frac{\alpha_{n+1}}{(n+2)^2}; \tag{39}$$

(F) ist also erfüllt, wenn (F_{18}) erfüllt ist.

b) Nicht notwendig:

Die Folge

$$\varepsilon_n = \Delta^{-3} \frac{(-1)^n}{\binom{n+2}{n}(n+1)^2} = \sum_{\varrho=n}^{\infty} \frac{\binom{\varrho-n+2}{\varrho-n}}{\binom{\varrho+2}{\varrho}} \frac{(-1)^\varrho}{(\varrho+1)^2} \tag{40}$$

erfüllt die Bedingungen (F) und (G): (F) ist wegen

$$\Delta^3 \varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{\binom{n+2}{n}(n+1)^2} \tag{41}$$

erfüllt und (G) ist wegen

$$|\varepsilon_\nu| = \left| \sum_{\varrho=n}^{\infty} \frac{\binom{\varrho-n+2}{\varrho-n}}{\binom{\varrho+2}{\varrho}} \frac{(-1)^\varrho}{(\varrho+1)^2} \right| \leqq 3 \cdot \operatorname*{Max}_r \left| \sum_{\mu=n}^{r} \frac{(-1)^\mu}{(\mu+1)^2} \right| = \frac{3}{(n+1)^2} \tag{42}$$

richtig. Andererseits genügt die Folge (40) der Bedingung (F_{18}) nicht.

Aus (39) folgt nämlich

$$\alpha_n = (n+1)^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} (-1)^{\nu-n} \Delta^3 \varepsilon_\nu ; \tag{43}$$

setzt man hier (41) ein, so folgt

$$|\alpha_n| \sim (n+1)^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^4} \sim \frac{1}{(n+1)}, \tag{44}$$

also $\sum |\alpha_n| = +\infty$.

Die Bedingungen (F_{13}) und (G_{13}) sind also für das Verfahren R_n^2 notwendige Konvergenzbedingungen, die aber schon deshalb nicht hinreichend sind, weil die genaue Größenbeschränkung der R_n^2-limitierbaren Folgen nicht $o(n^2)$, sondern $o(n^3)$ ist. Andererseits sind die Bedingungen (F_{13}) und (G_{13}) für das Verfahren $R^2(n)$ zwar hinreichend, aber nicht notwendig. Dies zeigt, wie verschiedenartig schon die beiden Verfahren R_n^2 und $R^2(n)$ sind.

Literatur.

Andersen, A. F.

[1] Über die Anwendung von Differenzen nicht ganzer Ordnung in der Reihentheorie, Skand. Math. Kongress Stockholm 1934, 326—348.

Bosanquet, L. S.

[2] A mean value theorem, J. Lond. Math. Soc. **16** (1941), 146—148.

[3] Note on convergence and summability factors (III), Proc. Lond. Math. Soc. (2), **50** (1949), 482—496.

Hardy, G. H.

[4] Divergent series, Oxford 1949.

Hardy, G. H. — Riesz, M.

[5] The general theory of Dirichlets series, Cambridge 1915.

Jacob, M.

[6] Über die Äquivalenz der Cesàroschen und der Hölderschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$, Math. Zeitschr. **26** (1927), 672—682.

Jurkat, W.

[7] Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln, Math. Zeitschr. **54** (1951), 262—271.

[8] Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter, Math. Zeitschr. **55** (1952), 8—12.

Knopp, K.

[9] Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes, J. f. Math. **187** (1950), 70—74.

Peyerimhoff, A.

[10] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr. **55** (1952), 23—54.

Riesz, M.

[11] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptus rendus **152** (1911), 1651—1654.

[12] Sur un théorème de la moyenne et ses applications, Acta Sceged **1** (1923), 114—126.

Verblunsky, S.

[13] On the limit of a function at a point, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **32** (1931), 163—199.

Zeller, K.

[14] Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen, Math. Zeitschr. **55** (1952), 55—70.

(Eingegangen am 29. Juni 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 109—113 (1951).

Alternativ-Zerlegungen in Booleschen Verbänden.

Von

Georg Aumann in München.

1. Als Beispiel einer nicht identisch verschwindenden, nicht-negativen, additiven, aber nicht total-additiven, für alle Mengen eines σ-Mengenkörpers erklärten Mengenfunktion m dient gewöhnlich die Funktion $m \mid \mathfrak{Z}$, erklärt auf dem System $\mathfrak{Z}$ aller Teilmengen der Menge Z aller natürlichen Zahlen mit $m(E) = 0$ für die endlichen Teilmengen E und $m(U) = +\infty$ für die unendlichen Teilmengen U von Z. Es ist klar, daß gerade die Verwendung des uneigentlichen Zahlwertes $+\infty$ die Hauptschwierigkeit der Aufzeigung einer solchen Funktion überwindet; verlangt man jedoch nach einer *beschränkten* Funktion obiger Art, so steht eine elementare Konstruktion nicht zur Verfügung. Am einfachsten löst man diese Aufgabe, etwa in $\mathfrak{Z}$, durch Herstellung einer „Alternativ-Zerlegung" $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^0 + \mathfrak{Z}^1$ von $\mathfrak{Z}$, d. h. einer Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ in zwei fremde Teilsysteme $\mathfrak{Z}^0$ und $\mathfrak{Z}^1$, wobei $\mathfrak{Z}^0$ ein Ideal in $\mathfrak{Z}$ ist und für $\mathfrak{Z}^1$ gilt: $X, Y \in \mathfrak{Z}^1 \rightsquigarrow (X\,Y \in \mathfrak{Z}^1$ und $X + Y \in \mathfrak{Z}^0)$ [1]. Kann man eine solche Alternativ-Zerlegung angeben, wobei $\mathfrak{Z}^0$ etwa alle endlichen Teilmengen von Z und $\mathfrak{Z}^1$ die Gesamtmenge Z selbst enthält, so liefert die Festsetzung $m(X) = 0$ bzw. 1 für $X \in \mathfrak{Z}^0$ bzw. $\mathfrak{Z}^1$ offenbar eine nicht identisch verschwindende, nicht negative, additive, aber nicht total-additive, für alle Mengen des σ-Mengenkörpers $\mathfrak{Z}$ definierte Mengenfunktion.

Im folgenden wird die Existenz solcher (nicht trivialer) Alternativ-Zerlegungen in beliebigen Booleschen Verbänden nachgewiesen (Erweiterungssatz in **3.** und Satz in **8.**). Das Ergebnis ist für Mengenkörper bereits von A. Tarski [2]) erhalten worden; die hier zur Verwendung kommende Konstruktion ist einem von St. Ulam [3]) benutzten Verfahren ähnlich.

2. Es sei $A = \{a, b, \ldots, x, \ldots\}$ ein (nicht leerer) *Somenring* (auch B-Verband genannt), in welchem $a + b$ und $a\,b$ eine Addition und Multi-

[1]) Den logischen Pfeil $\rightsquigarrow$ verwenden wir im Sinne der Aussage: Immer wenn das links davon Stehende gilt, gilt auch das rechts davon Stehende; $+$ bezeichnet die Mengenunterschiedsbildung (auch symmetrische Differenz genannt) und ist etwa als „kontraplus" zu lesen.

[2]) A. Tarski, Une contribution à la théorie de la mesure, Fund. Math. **15**, 42—50 (1930).

[3]) St. Ulam, Concerning functions of sets, Fund. Math. **14**, 231—233 (1929).

plikation bezeichnen[4]); die erste Verknüpfung mache A zu einer Abelschen Gruppe mit dem neutralen Element 0, die zweite sei assoziativ und bezüglich der ersten distributiv (in beiden Faktoren) mit der Besonderheit, daß $xx = x$ für $x \in A$. Dann ist die Multiplikation auch kommutativ und es gilt $x \dot{+} x = 0$ für $x \in A$. Statt $ab = a$ schreibt man auch $a \subset b$ („a Teilsoma von b" oder „b Obersoma von a"), wodurch A teilweise geordnet wird. Dabei erweist sich ab als das „größte" gemeinsame Teilsoma, $a \dot{+} b \dot{+} ab$ — wofür wir auch $a \dot{+} b$ („a koplus b") schreiben werden — als das „kleinste" gemeinsame Obersoma von a und b. Falls $ab = 0$, schreiben wir $a \dot{+} b = a \dot{+} b = a + b$.

3. J heißt ein *Ideal in* A, wenn

$$0 \in J \subset A; \tag{1}$$

$$x, y \in J \rightsquigarrow x \dot{+} y \in J; \tag{2}$$

$$(x \in J \text{ und } a \in A) \rightsquigarrow ax \in J. \tag{3}$$

Wegen $(x \dot{+} y)(x \dot{+} y) = x \dot{+} y$ ist J ein Teilsomenring von A. Wir nennen einen Somenring B *alternativ zerlegt*, wenn

$$B = B^0 + B^1,\ B^0 B^1 = 0,\ B^1 \neq 0; \tag{a}$$

$$B^0 \text{ ein Ideal in } B \text{ ist;} \tag{b}$$

$$x, y \in B^1 \rightsquigarrow xy \in B^1 \text{ und } x \dot{+} y \in B^0. \tag{c}$$

Zum Beispiel ist im Mengenkörper $\mathfrak{Z}$ (siehe **1.**) $\mathfrak{A} = \mathfrak{E} + \mathfrak{U}$, wo $\mathfrak{E}$ das System der endlichen Teilmengen von Z und $\mathfrak{U}$ das System aller Komplemente von endlichen Teilmengen von Z in Z bezeichnen, eine Alternativ-Zerlegung von $\mathfrak{A}$.

Es gilt nun der folgende

Erweiterungssatz. *Ist* $B = B^0 + B^1$ *eine Alternativ-Zerlegung des Teilringes* B *des Somenringes* A, *wobei* B^0 *ein Ideal in* A *ist, so gibt es eine Alternativ-Zerlegung* $A = A^0 + A^1$ *von* A *mit* $A^0 \supset B^0$ *und* $A^1 \supset B^1$.

4. Zum Beweis des Erweiterungssatzes gehen wir von einer Wohlordnung von A aus:

$$a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots, \xi < \beta, \tag{4.1}$$

setzen $B_0^0 = B^0$, $B_0^1 = B^1$, und nehmen zur Durchführung einer transfiniten Induktion an, daß für $\xi < \alpha$ die Mengenfolgen

$$\begin{aligned} &B_0^0 \subset B_1^0 \subset \cdots \subset B_\xi^0 \subset \ldots \\ &B_0^1 \subset B_1^1 \subset \cdots \subset B_\xi^1 \subset \ldots \end{aligned} \tag{4.2}$$

definiert sind, wobei $B_\xi = B_\xi^0 + B_\xi^1$ eine Alternativ-Zerlegung von B_ξ darstelle mit der Besonderheit, daß B_ξ^0 Ideal *in* A ist, und daß gelte:

[4]) Indem wir Somen, d. h. Elemente von A, prinzipiell mit kleinen, Somenmengen mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnen, können wir ohne Verwechslung die Verknüpfungszeichen $\dot{+}$, $\cdot$, $\dot{+}$, $+$, — sowohl für Somen- als auch für Mengenverknüpfungen in der üblichen Weise verwenden.

(4. 3) Ist ξ eine Limeszahl, so sei für $i = 0, 1$

$$\sum_{v<\xi} \dot{+} B_v^i = B_\xi^i;$$

(4. 4) Ist ξ keine Limeszahl, also $\xi = v + 1$, und zugleich $A - B_v$ nicht leer, so bezeichne k_ξ das erste Element in (4. 1), das nicht zu B_v gehöre, und es gelte:
B_ξ^0 ist die Menge aller $y \in A$, zu welchen es jeweils ein p $(= p(y))$ aus B_v^1 gibt mit $p k_\xi y \in B^0$;
B_ξ^1 ist die Menge aller $x k_\xi \dot{+} y$, wobei x die Menge B_v^1 und y die Menge B_ξ^0 durchlaufen.

(4. 5) Ist ξ keine Limeszahl, $\xi = v + 1$, aber $B_v = A$, so sei $B_\xi^0 = B_v^0$ und $B_\xi^1 = B_v^1$.

Wir zeigen, daß bei Definition von B_α^0 und B_α^1 gemäß (4. 3), (4. 4) und (4. 5) (mit $\xi = \alpha$) wieder gilt

(4. 6) $$B_\zeta^i \subset B_\alpha^i \text{ für } \zeta < \alpha \text{ und } i = 0, 1;$$

ferner, daß

(4. 7) $$B_\alpha = B_\alpha^0 + B_\alpha^1$$

eine Alternativ-Zerlegung des Somenringes B_α darstellt (Nr. **5.** und **6.**).

5. Ist α eine Limeszahl, so ist gemäß (4. 3) $(\xi = \alpha)$ offenbar (4. 6) erfüllt; ferner ist B_α^0 als Vereinigung einer wohlgeordneten aufsteigenden Folge von Idealen in A wieder ein solches (also auch ein Ideal in B_α); aus demselben Grunde ist auch die Eigenschaft (c) für B_α^1 erfüllt; schließlich ist B_α als Vereinigung einer wohlgeordneten aufsteigenden Folge von Somenringen wieder ein solcher.

Im Falle, daß α keine Limeszahl, also $\alpha = \tau + 1$, und $B_\tau = A$, ist die Behauptung trivial.

6. 1. Nun sei $\alpha = \tau + 1$ und $A - B_\tau \neq 0$. B_α^0 ist Ideal in A. In der Tat: Aus $y_i \in B_\alpha^0$, d. h. $p_i k_\alpha y_i \in B^0$ mit einem $p_i \in B_\tau^1$ für $i = 1, 2$ folgt, weil B^0 Ideal in A, $p_1 p_2 k_\alpha y_i \in B^0$, also $p_3 k_\alpha (y_1 \dot{+} y_2) \in B^0$ mit $p_3 = p_1 p_2 \in B_\tau^1$, somit $y_1 \dot{+} y_2 \in B_\alpha^0$. Für $a \in A$ ergibt sich analog $p_1 k_\alpha (a y_1) \in B^0$, also auch $a y_1 \in B_\alpha^0$.

6. 2. $B_\alpha^1 \supset B_\tau^1$. In der Tat: Ist $p \in B_\tau^1$, so folgt $p k_\alpha (p - p k_\alpha) = 0 \in B^0$, also $p - p k_\alpha \in B_\alpha^0$, und damit $p = p k_\alpha \dot{+} (p - p k_\alpha) \in B_\alpha^1$.

6. 3. $B_\alpha^0 B_\alpha^1 = 0$. Beweis: Im folgenden bezeichnen $p, p_1, \ldots$ jeweils passend gewählte Elemente aus B_τ^1. Angenommen, entgegen der Behauptung gäbe es ein $z = p k_\alpha \dot{+} y$ mit $y \in B_\alpha^0$ und zugleich $p_1 k_\alpha z \in B^0$, so folgte, weil $p_2 k_\alpha y \in B^0$ und $p p_1 p_2 = p_3$, daß $p_3 k_\alpha \in B^0$.

Wenn nun τ keine Limeszahl ist, so gilt $p_3 = q k_\tau \dot{+} u$ mit $q \in B_{\tau-1}^1$ und $u \in B_\tau^0$. Daraus folgt $q k_\tau k_\alpha = p_3 k_\alpha \dot{+} u k_\alpha$. Nun ist $q_1 k_\tau u \in B^0$ mit $q_1 \in B_{\tau-1}^1$, also $q_2 k_\tau k_\alpha \in B^0$ mit $q_2 = q q_1 \in B_{\tau-1}^1$. Dies bedeutete $k_\alpha \in B_\tau^0 \subset B_\tau$, was der Definition von k_α widerspricht.

Wenn andererseits τ Limeszahl ist, so besagt $p_3 \in B_\tau^1$, daß $p_3 \in B_\sigma^1$ mit einem $\sigma < \tau$. Alsdann ist auch $p_3 \in B_{\sigma+1}^1$ und $\sigma + 1 < \tau$, und es gilt

die Darstellung $p_3 = r k_{\sigma+1} \dotplus v$ mit $r \in B^1_\sigma$ und $v \in B^0_{\sigma+1}$. Dies führt zu $r k_{\sigma+1} k_\alpha = p_3 k_\alpha \dotplus v k_\alpha$ und, ähnlich wie eben, zum Widerspruch $k_\alpha \in B^0_{\sigma+1} \subset B_\tau$.

6. 4. Nun können wir zeigen: $B^0_\alpha \supset B^0_\tau$. In der Tat, es sei $y \in B^0_\tau$ und σ die kleinste Ordinialzahl $\leqq \tau$ mit $y \in B^0_\sigma$. Ist $\sigma = 0$, so ist die Behauptung $y \in B^0_\alpha$ trivial. Ist aber $\sigma > 0$, so kann es wegen (4. 3) keine Limeszahl sein. Daher haben wir $q k_\sigma y \in B^0$ mit $q \in B^1_{\sigma-1}$. Daraus folgt $q_1 k_\alpha y \in B^0$ mit $q_1 = q k_\sigma \dotplus 0 \in B^1_\sigma \subset B^1_\tau$, d. h. $y \in B^0_\alpha$.

6. 5. Es gilt (4. 7). In der Tat: Es sei $x_i \in B^1_\alpha$, also $x_i = p_i k_\alpha \dotplus y_i$ mit $p_i \in B^1_\tau$ und $y_i \in B^0_\alpha$, $i = 1, 2$. Dann ist $(p_1 k_\alpha \dotplus y_1)(p_2 k_\alpha \dotplus y_2) = p_3 k_\alpha \dotplus y_3$ mit $p_3 = p_1 p_2 \in B^1_\tau$ und $y_3 = y_1 x_2 \dotplus y_2 (p_1 k_\alpha) \in B^0_\alpha$, also $x_1 x_2 \in B^1_\alpha$; ferner folgt $(p_1 k_\alpha \dotplus y_1) \dotplus (p_2 k_\alpha \dotplus y_2) = w k_\alpha \dotplus y_4$ mit $w = p_1 \dotplus p_2 \in B^0_\tau \subset B^0_\alpha$ und $y_4 = y_1 \dotplus y_2 \in B^0_\alpha$, also $x_1 \dotplus x_2 \in B^0_\alpha$. Für $z \in B^0_\alpha$ gilt schließlich noch $x_1 \dotplus z = p_1 k_\alpha \dotplus (y_1 \dotplus z) \in B^1_\alpha$ und $x_1 z \in B^0_\alpha$ (weil B^0_α Ideal in A). Damit ist zugleich auch die Somenringeigenschaft von B_α bewiesen.

7. Betrachtung der Abbildung $\alpha \to \alpha + 1$ von $[\hat{\xi} < \beta]$ in $[\dot{v} < \beta + 1]$ lehrt, daß das obige Verfahren bereits innerhalb des Zahlabschnittes aller $\alpha < \beta + 1 = \lambda$ die Folge (4. 1) verbraucht. Damit erhalten wir mit

$$A^0 = \sum_{\xi < \lambda} \dot{+} B^0_\xi, \quad A^1 = \sum_{\xi < \lambda} \dot{+} B^1_\xi$$

eine Zerlegung $A = A^0 + A^1$ der verlangten Art.

8. Offenbar können Alternativ-Zerlegungen $A = A^0 + A^1$ überhaupt nur existieren, wenn A außer 0 noch weitere Elemente enthält; dies ist aber auch hinreichend:

Ist A nicht der triviale Somenring $\{0\}$, so gibt es stets Alternativ-Zerlegungen $A = A^0 + A^1$.

In der Tat, sei u ein von 0 verschiedenes Element von A. Setzen wir $B^0 = [\hat{x} u = 0]$ und $B^1 = [\hat{y} \supset u]$, dann ist, wie man sich leicht überzeugt, $B = B^0 + B^1$ eine Alternativ-Zerlegung, wie sie der Erweiterungssatz voraussetzt; seine Anwendung führt dann zur Behauptung.

9. Der Begriff der Alternativ-Zerlegung hängt aufs engste mit den Primidealen zusammen:

Die Zerlegung $A = A^0 + A^1$ des Somenringes A, worin A^0 ein Ideal bezeichnet, ist dann und nur dann eine Alternativ-Zerlegung, wenn A^0 ein von A verschiedenes Primideal ist).*

In der Tat, liegt eine Alternativ-Zerlegung vor, so ist ein gleichzeitiges Bestehen von $x \in A^1$, $y \in A^1$ und $xy \in A^0$ widerspruchsvoll. Aus $xy \in A^0$ folgt also stets $x \in A^0$ oder $y \in A^0$, d. h. das Ideal A^0 ist Primideal. Wenn andererseits A^0 in der Zerlegung $A = A^0 + A^1$ ein Primideal ist, so folgt aus $x \in A^1$ und $y \in A^1$ stets $xy \in A^1$, und weiter $x \dotplus y \in A^0$; denn wäre auch $x \dotplus y \in A^1$, so hätte man den Widerspruch $0 = xy(x \dotplus y) \in A^1$.

*) Oder, was dasselbe ist, wenn A^1 ein „Ultrafilter" ist.

10. Der Erweiterungssatz in **3.** liefert zugleich die Existenz nicht-trivialer Primideale, wie diese für den Beweis des STONEschen Darstellungssatzes benötigt wird:

Ist J ein Ideal in A und $A \ni u \notin J$, so gibt es ein Primideal P in A mit $u \notin P \supset J$.

Zum Beweis nehmen wir die Alternativ-Zerlegung $B = B^0 + B^1$, wo $B^0 = J$ und B^1 die Menge aller Elemente $u \dotplus j$ mit $j \in J$ ist. Erweiterung nach **3.** zu $A = A^0 + A^1$ mit $A^0 \supset B^0$ und $A^1 \supset B^1$ ergibt in $P = A^0$ das gewünschte Primideal.

11. Für die allgemeine Maßtheorie bedeutet die Existenz von Alternativ-Zerlegungen bzw. von Primidealen, daß *jeder* von $\{0\}$ verschiedene Somenring als Träger eines nicht-trivialen, beschränkten Inhalts, d. h. einer nicht identisch verschwindenden, beschränkten, additiven Somenfunktion auftreten kann.

(Eingegangen am 13. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 114—124 (1951).

Beziehungen zwischen den Normalabbildungsfunktionen der Theorie der konformen Abbildung.

Von

Herbert Meschkowski in Berlin.

I. Einleitung.

Vor kurzem haben GARABEDIAN und SCHIFFER Identitäten zwischen den Funktionen abgeleitet, die einen gegebenen n-fach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ mit glatten Randkomponenten auf die verschiedenen Typen von Normalbereichen abbilden. (Literaturverzeichnis [2].) Damit ist ein Gedanke von R. DE POSSEL weitergeführt, der bereits 1932 eine Darstellung aller Schlitzabbildungen (mit beliebigen Richtungen) durch zwei derselben gegeben hat [1]. — Ferner hat NEHARI [3] eine Darstellung der wichtigsten Normalabbildungsfunktionen durch die BERGMANNsche Kernfunktion gegeben, und LEHTO [4] hat als erster einen Existenzbeweis für die Parallelschlitzabbildung mit Hilfe von Orthonormalsystemen geführt.

In dieser Arbeit werden Darstellungen der Normalabbildungsfunktionen durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$M(z, u) = \tfrac{1}{2}(A(z, u) - B(z, u)),$$
$$N(z, u) = \tfrac{1}{2}(A(z, u) + B(z, u)),$$
$$w_\nu(z) = \omega_\nu(z) + i\,\omega_\nu^*(z).$$

Dabei sind $A(z, u)$ und $B(z, u)$ die Funktionen, die den gegebenen Bereich auf einen Parallelschlitzbereich mit Schlitzen parallel zur reellen bzw. imaginären Achse so abbilden, daß $u < \mathfrak{B}$ in den unendlich fernen Punkt übergeht (mit dem Residuum 1). $\omega_\nu(z)$ ist das harmonische Maß der Randkomponente C_ν, $\omega_\nu^*(z)$ die konjugierte Potentialfunktion. $w_\nu(z)$ ist im allgemeinen nicht eindeutig in $\mathfrak{B}$, wohl aber $w_\nu'(z)$. $w_\nu'(z)$ hat auf dem Rand $C = \sum_1^n C_\nu$ von $\mathfrak{B}$ keine, im Innern $n-2$ Nullstellen (vgl. [5], S. 35—37), die in der Folge als von einander verschieden angenommen werden [1]).

[1]) Daß es überhaupt Bereiche mit einfachen Nullstellen für $w_\nu'(z)$ gibt, erkennt man z. B. durch Betrachtung gewisser symmetrischer Bereiche. Die Nullstellen von $w_\nu'(z)$ sind nach [5] die Verzweigungsstellen der Niveaulinien von $\omega_\nu(z)$. Sei $\mathfrak{B}_1$ ein vierfach zusammenhängender Bereich, der symmetrisch zur x- und y-Achse liegt und Null nicht als inneren Punkt enthält. Dann müssen die Niveaulinien die gleiche Symmetrieeigenschaft zeigen, und die beiden Verzweigungen können nicht zusammenfallen, wenn $\omega_\nu(z)$ auf der äußeren Berandung gleich 1 gewählt

II. Die Radialschlitzabbildung.

$r(z) = r(z; z_1 z_2)$ sei die Funktion, die den gegebenen n-fach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ so auf einen Radialschlitzbereich abbildet, daß z_1 in 0, z_2 in ∞ abgebildet wird (mit dem Residuum $+1$).

Auf der Randkurve C_ν gilt dann folgende Beziehung:

$$\arg r(z) = \Im \log r(z) = c_\nu .$$

Daraus folgt

$$\log r(z) - \overline{\log r(z)} = 2 i c_\nu .$$

Differentiation ergibt:

$$\frac{r'(z)}{r(z)} dz = \frac{\overline{r'(z)}}{\overline{r(z)}} \overline{dz}. \tag{1}$$

Wir betrachten jetzt das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{r'(z; z_1 z_2)}{r(z; z_1 z_2)} \frac{P'(z; u v)}{w_\nu'(z)} dz. \tag{2}$$

Dabei ist

$$P(z; u v) = \tfrac{1}{2} (\log k(z; u v) - \log r(z; u v)),$$

wobei $k(z, u v)$ die Funktion ist, die $\mathfrak{B}$ in analoger Weise auf einen Kreisschlitzbereich abbildet. — Berechnen wir J zunächst nach der Residuenmethode.

Der Quotient $\frac{r'(z; z_1 z_2)}{r(z; z_1 z_2)}$ hat für die Nullstelle z_1 von $r(z)$ einen Pol mit dem Residuum $+1$, für den Pol z_2 einen Pol mit dem Residuum -1. $\zeta_\mu^{(\nu)}$ seien die $n-2$ Nullstellen von $w_\nu'(z)$, $\varrho_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{w_\nu''(\zeta_\mu^{(\nu)})}$ die Residuen von $\frac{1}{w_\nu'(z)}$. $P'(z)$ ist in $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig (vgl. [2]). — Dann wird wegen der angenommenen Verschiedenheit der $\zeta_\mu^{(\nu)}$:

$$J = \frac{P'(z_1; u v)}{w_\nu'(z_1)} - \frac{P'(z_2; u v)}{w_\nu'(z_2)} + \sum_{\mu=1}^{n-2} \varrho_\mu^{(\nu)} \frac{r'(\zeta_\mu^{(\nu)})}{r(\zeta_\mu^{(\nu)})} \frac{P'(\zeta_\mu^{(\nu)}; u v)}{r(\zeta_\mu^{(\nu)})}. \tag{3}$$

Der konjugiert komplexe Wert des Integrals J wird nach (2):

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{r'}}{\overline{r}} \frac{\overline{P'}}{\overline{w_\nu'(z)}} \overline{dz}.$$

Nun gilt folgende Randbedingung:

$$\overline{P'}\, \overline{dz} = -Q'\, dz. \tag{4}$$

Dabei ist

$$Q(z) = \tfrac{1}{2} (\log k(z; u v) + \log r(z; u v))$$

(vgl. [2] 16). Da $w_\nu'(z)\, dz$ auf allen Randkomponenten C_ν rein imaginär ist, gilt ferner:

$$\overline{w_\nu'(z)\, dz} = -w_\nu'(z)\, dz. \tag{5}$$

---

wird. Aus Stetigkeitsgründen sind dann die Verzweigungen auch getrennt für solche Bereiche, die sich in ihrer Begrenzung von dem symmetrischen genügend wenig unterscheiden.

Wegen (1), (4) und (5) wird dann

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{r'}{r}\cdot Q'\cdot\frac{1}{w_\nu'(z)}\,dz.$$

Berechnung nach der Residuenmethode ergibt

$$\bar{J} = \left(\frac{Q'(z_1;\,u\,v)}{w_\nu'(z_1)} - \frac{Q'(z_2,\,u\,v)}{w_\nu'(z_2)}\right) + \sum_{\mu=1}^{n-2}\varrho_\mu^{(\nu)}\frac{r'(\zeta_\mu^{(\nu)})}{r(\zeta_\mu^{(\nu)})}\cdot Q'(\zeta_\mu^{(\nu)};\,u\,v) + \frac{r'(u)}{r(u)\,w_\nu'(u)} - \frac{r'(v)}{r(v)\,w_\nu'(v)}. \tag{6}$$

Dabei ist zu beachten, daß Q' nicht wie P' in $\mathfrak{B}$ regulär ist, sondern bei u und v einfache Pole mit dem Residuum $+1$ bzw. -1 hat.

Daraus folgt

$$\frac{r'(u)}{r(u)\,w_\nu'(u)} = \frac{Q'(z_2,\,u\,v)}{w_\nu'(z_2)} - \frac{Q'(z_1;\,u\,v)}{w_\nu'(z_1)} - \sum\varrho_\mu^{(\nu)}\frac{r'(\zeta_\mu^{(\nu)})}{r(\zeta_\mu^{(\nu)})}\,Q'(\zeta_\mu^{(\nu)}) + \frac{r'(v)}{r(v)\,w_\nu'(v)} - \bar{J}. \tag{7}$$

Aus (3) folgt unter Benutzung von [2 (63)]:

$$\bar{J} = \frac{M(u\,z_1) - M(v\,z_1)}{\overline{w_\nu'(z_1)}} - \frac{M(u\,z_2) - M(v\,z_2)}{\overline{w_\nu'(z_2)}} + \sum\overline{\varrho_\mu^{(\nu)}}\,\frac{\overline{r'(\zeta_\mu^{(\nu)})}}{\overline{r(\zeta_\mu^{(\nu)})}}\,(M(u\,\zeta_\mu^{(\nu)}) - M(v\,\zeta_\mu^{(\nu)})). \tag{8}$$

Formt man jetzt (7) entsprechend um unter Benutzung von [1 (61)], so folgt daraus

$$\frac{r'(u)}{r(u)\,w_\nu'(u)} = \left(\frac{N(u\,z_1)}{w_\nu'(z_1)} - \frac{N(u\,z_2)}{w_\nu'(z_2)}\right) - \left(\frac{M(u\,z_1)}{\overline{w_\nu'(z_1)}} - \frac{M(u\,z_2)}{\overline{w_\nu'(z_2)}}\right) + \sum_{\mu=1}^{n-2}\frac{\varrho_\mu^{(\nu)}\,r'(\zeta_\mu^{(\nu)})}{r(\zeta_\mu^{(\nu)})}\,N(u\,\zeta_\mu^{(\nu)}) - \frac{\overline{\varrho_\mu^{(\nu)}}\,\overline{r'(\zeta_\mu^{(\nu)})}}{\overline{r(\zeta_\mu^{(\nu)})}}\,M(u\,\zeta_\mu^{(\nu)}) + C(v). \tag{9}$$

In (9) sind die von v abhängigen Größen in dem Symbol $C(v)$ zusammengefaßt. Wenn wir jetzt v, z_1 und z_2 als gegebene Konstanten u als eine veränderliche Größe ansehen, so haben wir folgende Beziehung:

$$\frac{r'(u)}{r(u)} = w_\nu'(u)\left[\left(\frac{N(u\,z_1)}{w_\nu'(z_1)} - \frac{N(u\,z_2)}{w_\nu'(z_2)}\right) - \left(\frac{M(u\,z_1)}{\overline{w_\nu'(z_1)}} - \frac{M(u\,z_2)}{\overline{w_\nu'(z_2)}}\right)\right] + \sum_{\mu=1}^{n-2}(\alpha_\mu^{(\nu)}\,N(u\,\zeta_\mu^{(\nu)}) - \overline{\alpha_\mu^{(\nu)}}\,M(u\,\zeta_\mu^{(\nu)})) + \text{const}. \tag{9a}$$

Dabei ist

$$\alpha_\mu^{(\nu)} = \frac{r'(\zeta_\mu^{(\nu)})}{r(\zeta_\mu^{(\nu)})\,w_\nu''(\zeta_\mu^{(\nu)})}.$$

Also gilt[2])

$$r(u) = e^{\int_{u_0}^{u} w'(z)\,q(z;\,z_1\,z_2,\,\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-2})\,dz} \tag{9b}$$

[2]) Im folgenden wird zur Vereinfachung der Index ν fortgelassen. Wir denken uns eine Randkomponente fest gewählt, auf der $\omega_\nu(z) = 1$ ist.

Die Funktion φ ist so definiert:

$$\varphi = \left(\frac{N(z\,z_1)}{w'(z_1)} - \frac{N(z\,z_2)}{w'(z_2)}\right) - \left(\frac{M(z\,z_1)}{\overline{w'(z_1)}} - \frac{M(z\,z_2)}{\overline{w'(z_2)}}\right) + \sum_{\mu}(\alpha_\mu N(z\,\zeta_\mu) - \overline{\alpha_\mu}\, M(z\,\zeta_\mu)) + \text{const.}$$

Man kann sich nun umgekehrt fragen, wann eine durch (9 b) gegebene Funktion eine Radialschlitzabbildung darstellt. Gefragt ist also nach den Bedingungen für die Konstanten α_μ. Da $w'(z)\,dz$ rein imaginär ist auf dem Rand, muß es bei einer Radialschlitzabbildung auch $\frac{r'}{r}\cdot\frac{1}{w'}$ sein. — Nun gilt auf dem Rand C_ϱ nach [2 (57)]

$$M(z\,u) = \overline{N(z\,u)} + l_\varrho(u) \qquad \varrho = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Setzt man das in die Bedingung

$$\arg\frac{r'}{r\,w'(z)} = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \Re(\varphi(z; z_1\, z_2 \zeta_1 \ldots \zeta_{n-2})) = 0$$

ein, so erhält man

$$\Re\left[-\frac{\overline{l_\varrho(z_1)}}{\overline{w'(z_1)}} + \frac{\overline{l_\varrho(z_2)}}{\overline{w'(z_2)}} + x - \sum\overline{\alpha_\mu}\,\overline{l_\varrho(\zeta_\mu)}\right] = 0. \tag{11}$$

Dabei ist für die Konstante $x + iy$ gesetzt, und die rein imaginären Differenzen konjugiert komplexer Glieder sind in der Klammer fortgelassen. — Setzt man

$$\alpha_\mu = \alpha_{1\mu} + i\alpha_{2\mu}, \quad l_\varrho(\zeta_\mu) = l^{(1)}_{\varrho\mu} + i\,l^{(2)}_{\varrho\mu},$$

so kann man (11) so schreiben:

$$\sum_{\mu=1}^{n-2}(\alpha_{1\mu}\,l^{(1)}_{\varrho\mu} - \alpha_{2\mu}\,l^{(2)}_{\varrho\mu}) - x = c_\varrho(z_1\,z_2), \qquad \varrho = 1, \ldots, n. \tag{11a}$$

$$c_\varrho(z_1\,z_2) = \Re\left[-\frac{\overline{l_\varrho(z_1)}}{\overline{w'(z_1)}} + \frac{\overline{l_\varrho(z_2)}}{\overline{w'(z_2)}}\right].$$

(11a) ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$, x.

Eine durch (9 b) dargestellte Funktion mit Zahlen $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$ und x, y, die dem Gleichungensystem (11a) genügen, bildet den Rand von $\mathfrak{B}$ auf Radialschlitze ab. Die Funktion braucht aber noch nicht eindeutig zu sein. —

Zur Untersuchung der Mehrdeutigkeit betrachten wir zunächst die singulären Stellen z_1 und z_2. Das Integral $\int w'(z)\,\varphi\,dz$ über einen kleinen Kreis um z_1 oder z_2 hat den Wert $\pm 2\pi i$. Da $e^{2\pi i} = 1$, liefert also eine Umkreisung von z_1 oder z_2 keine Mehrdeutigkeit der durch (9 b) dargestellten Funktion.

Dagegen muß gesichert sein, daß für $(n-1)$ Ränder C_ϱ das Integral

$$\oint_{C_\varrho} w'(z)\,\varphi\,dz$$

verschwindet, damit Eindeutigkeit erreicht wird. Das führt, wie man leicht sieht, wieder zu einem linearen Gleichungensystem für die Konstanten $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$, x, y.

Nimmt man die Bedingungen für das Randverhalten und für die Eindeutigkeit zusammen, so erhält man $2n-1$ Gleichungen für die $2n-2$ Unbekannten $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$, x, y. Der Grund für diese Tatsache liegt darin, daß die Funktionen $M(zu)$ und $N(zu)$ nur bis auf additive Konstanten bestimmt sind, so daß sich zwischen den Konstanten der Gleichungssysteme noch Beziehungen ergeben.

III. Die Kreisschlitzabbildung.

Für die auf einen Kreisschlitzbereich abbildende Funktion $k(z; z_1 z_2)$ kann eine ähnliche Beziehung gefunden werden. An Stelle von (1) tritt eine andere Randbedingung. Aus

$$k(z)\,\overline{k(z)} = r_\varrho^2$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{k'}{k}dz = -\frac{\overline{k'}}{\overline{k}}\overline{dz}. \tag{12}$$

Die Umformung des Integrals

$$J = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{k'\,P'\,dz}{k\,w'(z)}$$

führt dann ähnlich wie oben zu der Beziehung:

$$\frac{k'(u)}{k(u)} = w'(u)\left[\left(\frac{N(u\,z_1)}{w'(z_1)} - \frac{N(u\,z_2)}{w'(z_2)}\right) + \left(\frac{M(u\,z_1)}{\overline{w'(z_1)}} - \frac{M(u\,z_2)}{\overline{w'(z_2)}}\right) + \sum_\mu (\beta_\mu N(u\,\zeta_\mu) + \bar{\beta}_\mu M(u\,\zeta_\mu)) + \text{const.}\right]. \tag{13}$$

IV. Die Abbildung auf das Innere des Einheitskreises.

Für die Funktionen, die den gegebenen Bereich $\mathfrak{B}$ auf das Innere des Einheitskreises, die Randkomponenten auf die (einfach oder mehrfach durchlaufene) Peripherie des Einheitskreises abbilden, ist in [2] bereits eine Darstellung gegeben worden [2 (131)]:

$$E(z) = A_1 + \sum \bar{r}_\nu M(z\,n_\nu). \tag{14}$$

Dabei sind die n_ν die Nullstellen von $E(z)$.

Wir wollen zunächst eine Ableitung von (14) angeben, die kürzer ist als die in [2] gegebene und insbesondere die Verwendung der Funktionen $P(z, u)$ und $Q(z, u)$ vermeidet. — Wir gehen aus von dem Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_c E(z)\,N'(z\,v)\,dz = -E'(v). \tag{15}$$

Wegen $E \cdot \bar{E} = 1$ und der aus (10) sich ergebenden Beziehung

$$\overline{M'}\,\overline{dz} = N'\,dz$$

folgt daraus

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{M'(z\,v)}{E}\,dz.$$

Nach dem Residuensatz ist dann

$$-\bar{J} = \sum_\nu r_\nu\, M'(z_\nu\, v).$$

Dabei sind z_ν die Nullstellen von E und r_ν die entsprechenden Residuen von $\frac{1}{E}$. Wegen [2 (65)] folgt

$$-J = \sum_{\nu=1}^{N} \overline{r_\nu}\,\overline{M'(z_\nu\, v)} = \sum \overline{r_\nu}\, M'(v\, z_\nu).$$

Integration ergibt (wegen (15))

$$E(v) = \sum r_\nu M(v\, z_\nu) + \text{const.}$$

Damit ist (14) bewiesen.

Im folgenden soll für die Funktionen $E(z)$ eine Beziehung gefunden werden, in die die Nullstellen der Ableitung eingehen. Aus der Randbeziehung $E \cdot \bar{E} = 1$ folgt wie oben durch Differentiation

$$\frac{E'\,dz}{E} = -\frac{\overline{E'}\,\overline{dz}}{\bar{E}}. \tag{16}$$

Ähnlich wie oben wird jetzt das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{E(z)\,P'\,w'(z)\,dz}{E'(z)} \tag{17}$$

umgeformt.

Aus (4), (5) und (16) folgt

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\overline{E(z)}\,\overline{P}\,\overline{w'(z)}\,\overline{dz}}{\overline{E'}} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{E\,Q'\,w'\,dz}{E'}. \tag{18}$$

Es seien jetzt z_μ die Nullstellen[3]) von E'. $\frac{1}{E'}$ hat dann die Residuen $\frac{1}{E''(z_\mu)}$.

Aus (17) folgt nach der Residuenmethode

$$J = \sum_{\mu=1}^{m} r_\mu\, w'(z_\mu)\, P'(z_\mu;\, u\, v).$$

Dabei ist

$$r_\mu = \frac{E(z_\mu)}{E''(z_\mu)}.$$

Aus (18) folgt entsprechend:

$$\bar{J} = \sum r_\mu\, w'(z_\mu)\, Q'(z_\mu;\, u\, v) + w'(u)\frac{E(u)}{E'(u)} - w'(v)\frac{E(v)}{E'(v)}.$$

[3]) Sämtlich einfach angenommen.

Unter Benutzung von [1 (61)] und [1 (63)] folgt

$$\overline{J} = \sum \overline{r_\mu}\,\overline{w'(z_\mu)}\,\overline{P'(z_\mu;\, u\, v)} = \sum \overline{r_\mu}\,\overline{w'(z_\mu)}\,(M(u\,z_\mu) - M(v\,z_\mu))$$
$$= \sum r_\mu\, w'(z_\mu)\,(N(v\,z_\mu) - N(u\,z_\mu)) + w'(u)\frac{E(u)}{E'(u)} - w'(y)\frac{E(v)}{E'(v)}.$$

Also wird

$$(19)\qquad \frac{w'(u)\,E(u)}{E'(u)} = \sum_{\mu=1}^{m} (\overline{r_\mu}\,\overline{w'(z_\mu)}\,M(u\,z_\mu) + r_\mu\, w'(z_\mu)\,N(u\,z_\mu)) + C_1(v).$$

Für festes v folgt daraus

$$(19\,a)\qquad \frac{w'(u)\,E(u)}{E'(u)} = \sum (\varrho_\mu M(u\,z_\mu) + \varrho_\mu N(u\,z_\mu)) + \text{const.}$$

Dabei ist

$$\varrho_\mu = \frac{E(z_\mu)\,w'(z_\mu)}{E''(z_\mu)}.$$

Also wird

$$(19\,b)\qquad E(u) = c^{\int_{u_0}^{u} \frac{w'(z)\,dz}{\sum (\overline{\varrho_\mu} M(z\,z_\mu) + \varrho_\mu N(z\,z_\mu))}}.$$

Interessant ist die umgekehrte Frage, wann eine durch (19 b) gegebene Funktion eine eindeutige Funktion mit den oben für $E(z)$ festgesetzten Abbildungseigenschaften darstellt. Zunächst überzeugt man sich leicht durch Differentiation, daß $E'(u)$ für $z = z_\mu$ verschwindet. Wenn das Bild des Randes C_ϱ ein Kreisbogen sein soll, so muß

$$\arg E - \arg d\,E = \pm\frac{\pi}{2}$$

gelten. Wegen (5) bedeutet das, daß

$$\frac{w'(u)\,E(u)}{E'(u)}$$

reell sein muß. Das bedeutet:

$$(20)\qquad \mathfrak{J}_m \sum_{\mu=1}^{m} (\overline{\varrho}_\mu M(u\,z_\mu) + \varrho_\mu N(u\,z_\mu)) = 0.$$

Setzen wir

$$A(z\,u) = \gamma_\varrho(z\,u) + i\,\alpha_\varrho(u), \quad B(z\,u) = \beta_\varrho(u) + \delta_\varrho(z\,u)$$
$$\varrho_\mu = \varrho_\mu^{(1)} + i\,\varrho_\mu^{(2)}, \qquad (z \leqq C_\varrho)$$

so folgt aus (20):

$$(21)\qquad \sum_{\mu=1}^{m} (\varrho_\mu^{(1)}\alpha_\varrho(z_\mu) + \varrho_\mu^{(2)}\beta_\varrho(z_\mu)) = 0, \qquad \varrho = 1, \ldots, n.$$

Wenn die Gleichungen (17) erfüllt sind, ist andererseits $\frac{w'(u)\,E(u)}{E'(u)}$ reell auf dem Rand, $\arg E - \arg d\,E = \pm\frac{\pi}{2}$. Das Bild des Randes ist ein

Kreisbogen um den Nullpunkt. Es ist damit aber noch nicht gesagt, daß der absolute Betrag gleich 1 ist und daß die Funktion in $\mathfrak{B}$ eindeutig ist. Um diese Eigenschaften zu sichern, müssen weitere Bedingungsgleichungen aufgestellt werden, die aber nicht mehr linear sind.

V. Die Vollkreisabbildung.

Die Betrachtung für die Vollkreisabbildung wird zunächst für den Fall eines zweifach zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{B}$ formuliert. $K(z\,v)$ sei die Funktion, die $\mathfrak{B}$ so auf einen Vollkreisbereich abbildet, daß $z = v$ in Unendlich übergeht (Residuum 1).

Wir betrachten das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_c N(z\,u)\, K'(z\,v)\, dz, \qquad (u < \mathfrak{B},\ v < \mathfrak{B}). \tag{22}$$

Nach der Residuenmethode wird

$$J = -N'(v\,u) + K'(u\,v).$$

Daraus folgt nach [2 (67)]

$$J = K'(u\,v) - N'(u\,v). \tag{22 a}$$

Setzt man $\zeta = K(z, v)$, so wird andererseits

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_K N(z(\zeta), u)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_\nu \oint_{K_\nu}.$$

Dabei ist K der Rand des Vollkreisbereiches $\mathfrak{K}$, auf den $\mathfrak{B}$ durch $K(z\,v)$ abgebildet wird[4]). Für $N(z(\zeta), u)$ können wir setzen

$$N(z(\zeta), u) = \tfrac{1}{2}(A(z\,u) + B(z\,u)) = n(\zeta\,w) = \tfrac{1}{2}(a(\zeta\,w) + b(\zeta\,w)). \tag{23}$$

Dabei ist $w = K(u)$. w ist ein im Endlichen gelegener innerer Punkt von $\mathfrak{K}$. Das Integral kann dann geschrieben werden

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_K n(\zeta\,w)\, d\zeta.$$

Jetzt soll die Funktion durch Spiegelung analytisch fortgesetzt werden. — Es seien die Spiegelbilder von w an K_1, K_2: w_1, w_2.

Die Mittelpunkte von K_ν: m_ν.

Die Radien von K_ν: r_ν.

Das Spiegelbild von K_2 (an K_1) heiße K_3 usf.

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_3} + \sum \text{res}.$$

[4]) Die einzelnen Kreise heißen K_ν.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß $n(\xi)$ in den Punkten w_1 und w_2 regulär ist, so daß keine Residuen auftreten.

Aus der Darstellung von $A(z\,u)$ in der Umgebung von u:

$$A(z\,u) = \frac{1}{z-u} + a_1(z-u) + \cdots$$

folgt

$$a(\xi\,w) = \frac{K'(u)}{\xi - w} + \text{reg.} \tag{24}$$

Wenn mit ξ_1 bzw. w_1 die Spiegelpunkte von ξ, w (bei der Spiegelung an K_1) bezeichnet werden, so gilt

$$(\overline{\xi_1 - m_1})(\xi - m_1) = r_1^2,$$
$$(\overline{w_1 - m})(w - m_1) = r_1^2.$$

Daraus folgt

$$\xi - w = -\frac{r_1^2(\overline{\xi_1 - w_1})}{(\overline{\xi_1 - m_1})(\overline{w_1 - m_1})}. \tag{25}$$

Jetzt wird $\frac{1}{\overline{\xi_1 - m_1}}$ in eine Reihe entwickelt:

$$\frac{1}{\overline{\xi_1 - m_1}} = \frac{1}{\overline{w_1 - m_1}} + \alpha_1(\xi_1 - w_1) + \cdots.$$

In (25) eingesetzt:

$$\xi - w = -\frac{r_1^2}{(\overline{w_1 - m_1})^2}(\overline{\xi_1 - w_1}) + \cdots.$$

Wird das in (24) eingesetzt, so erhält man

$$a(\xi_1) = -\frac{\overline{\zeta'(u)}(\overline{w_1 - m_1})^2}{r_1^2}\frac{1}{\xi_1 - w_1} + \overline{\text{reg.}} \tag{25 a}$$

Eine Spiegelung an einem Schlitz parallel zur reellen Achse kann so ausgedrückt werden:

$$a_1(\xi_1) = \overline{a(\xi_1)} + c. \tag{25 b}$$

Also wird nach (25 a) (unter Fortlassung des Index 1 für ξ_1 und a_1)

$$a(\xi) = -\frac{\overline{\zeta'(u)}(w_1 - m_1)^2}{r_1^2}\frac{1}{\xi - w_1} + \text{reg.} \tag{26}$$

Für die Spiegelung an einem Schlitz parallel zur imaginären Achse gilt aber

$$b_1(\xi_1) = -\overline{b(\xi_1)} + c_1. \tag{25 c}$$

Infolgedessen lautet die Entwicklung von $b(\xi)$ bei w_1:

$$b(\xi) = +\frac{\overline{\zeta'(u)}(w_1 - m_1)^2}{r_1^2}\frac{1}{\xi - w_1} + \text{reg.} \tag{26 a}$$

$n(\zeta) = \frac{1}{2}(a(\zeta) + b(\zeta))$ ist also bei w_1 und w_2 regulär. Deshalb gilt

$$J = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{K_3} + \oint_{K_4}\right).$$

Die Spiegelung an K_3 liefert die Spiegelpunkte:

für w: w_3,

für w_1, w_2: w_{13}; w_{23}.

Durch Wiederholung der oben durchgeführten Betrachtungen erkennt man: $n(\zeta)$ hat Pole an den (durch zweimalige Spiegelung erhaltenen) Punkten w_{13}, w_{23}, nicht aber für w_3.

Um für die Residuen eine einfache Bezeichnung zu haben, setzen wir

$$\alpha_1 = \frac{(w_1 - m_1)^2}{r_1^2}, \quad \alpha_{13} = \frac{(w_{13} - m_3)^2}{r_3^2}.$$

Dann wird das Residuum von w_{13}: $\zeta'(u)\,\bar{\alpha}_1\,\alpha_{13}$,

von w_{23}: $\zeta'(u)\,\bar{\alpha}_2\,\alpha_{23}$.

Es wird also

$$J = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{K_5} + \oint_{K_6}\right) + K'(u\,v)\,[\bar{\alpha}_1\,\alpha_{13} + \bar{\alpha}_2\,\alpha_{23} + \bar{\alpha}_1\,\alpha_{14} + \alpha_3\,\alpha_{24}].$$

Dabei ist allgemein

$$\alpha_{\nu\mu} = \frac{(w_{\nu\mu} - m_\mu)^2}{r_\mu^2}.$$

Die nächste Spiegelung führt auf

$$J = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{K_7} + \oint_{K_8}\right) + K'(u\,v)\,[\alpha_1\,\alpha_{13} + \bar{\alpha}_3\,\alpha_{23} + \bar{\alpha}_1\,\alpha_{14} + \bar{\alpha}_2\,\alpha_{24} + \bar{\alpha}_3\,\alpha_{35} + \bar{\alpha}_4\,\alpha_{45} + \bar{\alpha}_4\,\alpha_{46}].$$

Allgemein wird

$$J = K'(u\,v)\,\alpha(w). \tag{27}$$

Dabei ist $\alpha(w)$ eine konvergente Reihe, deren Bildungsgesetz durch die fortgesetzten Spiegelungsprozesse gegeben ist.

Die Konvergenz ergibt sich aus der Tatsache, daß

$$\lim_{\nu \to \infty}\left(\int_{K_{2\nu-1}} n(\zeta, w)\,d\zeta + \int_{K_{2\nu}} n(\zeta\,w)\,d\zeta\right) = 0.$$

Die Länge der Integrationswege konvergiert nämlich gegen 0. Die Funktionswerte von $n(\zeta\,w)$ auf $K_{2\nu-1}$ bzw. $K_{2\nu}$ liegen auf den Spiegelbildern der Schlitze, die den Kreisen K_1 und K_2 entsprechen. Sie sind zwar nicht beschränkt, unterscheiden sich aber von den Werten, die durch die Bilder von K_1 und K_2 gegeben sind, nur um additive Konstanten. Da das Integral über diese Konstante 0 wird, ergibt sich so die Konvergenz.

Aus (22) und (27) folgt

$$N'(u\,v) = K'(u\,v)\,[1 - \alpha(K(u))]. \tag{28}$$

Die Funktion $\alpha(w)$ ist aus der geometrischen Konfiguration des Bereiches $\mathfrak{R}$ bestimmt.

Aus der Ableitung folgt nebenher, daß für einfach zusammenhängende Bereiche $\alpha_1(w) = 0$ ist, also: $N(u\,v) = K(u\,v)$.

Diese Tatsache ergibt sich auch aus der in [2] erwähnten Extremaleigenschaft der Funktion $N(z\,u)$: Unter allen eindeutigen und das Gebiet $\mathfrak{B}$ schlicht abbildenden Funktionen, die in u einen einfachen Pol mit dem Residuum $+1$ haben, bildet $N(z\,u)$ das Gebiet so ab, daß die Komplementärmenge des Bildgebietes einen maximalen Flächeninhalt hat. Es ist seit langem bekannt, daß für einfach zusammenhängende Gebiete der Vollkreisbereich diese Eigenschaft hat.

Für zweifach zusammenhängende Bereiche ist aber im allgemeinen $\alpha(w) \neq 0$. Man sieht z. B. sofort, daß für einen zur reellen Achse symmetrischen Kreisbereich für reelles w sämtliche $\alpha_{\nu\mu}$ als Quadrate reeller Zahlen positiv sind. Die Reihe für $\alpha(w)$ kann also nicht die Summe 0 haben.

Je besser die Reihe $\alpha(w)$ konvergiert, desto weniger unterscheiden sich $K(u)$ und $N(u)$. Das wird dann der Fall sein, wenn die Radien der Kreise klein sind gegen die Entfernungen der Mittelpunkte.

Für mehrfach zusammenhängende Bereiche ($n > 2$) kann die Beziehung (28) deshalb nicht allgemein ausgesprochen werden, weil die Konvergenz der Reihe für $\alpha(w)$ nicht mehr allgemein gesichert ist.

Literaturverzeichnis.

de Possel, R.

[1] Sur quelques propriétés de la représentation conformes des domaines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles. Math. Annalen 107, 1932.

Garabedian and Schiffer.

[2] Identities in the theory of conformal mapping. „Transactions" 65, 2, March 1949.

Nehari, Z.

[3] The kernel function and canonical conformal maps. Duke Math. Journal 16, 1949, S. 165—178.

Lehto, O.

[4] Anwendung orthogonaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremal- und Abbildungsprobleme. — Ann. Ac. Scient. Fenn. Series A, I. 59 (1949).

Nevanlinna, R.

[5] Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936.

(Eingegangen am 13. Juni 1951.)